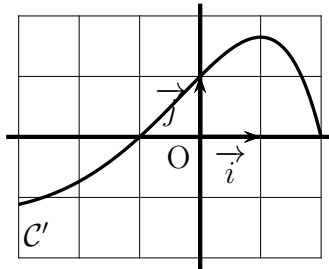


1G. Correction du dm n° 8

Exercice 1

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée** f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci-dessous.



1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leq 0$.
Sur l'intervalle $[-3, -1]$, les points de la courbe ont une ordonnée négative ou nulle. **VRAI.**
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
Sur l'intervalle $[-1 ; 2]$, on lit que $f'(x) \geq 0$, donc que f est croissante sur cet intervalle. **VRAI.**
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geq -1$.
Sur l'intervalle $] -1 ; 0]$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $] -1 ; 0]$. Or on sait que $f(0) = -1$.
D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les réels de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1 . **FAUX.**
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$.
Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = x - 1$.
Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1 ; 0)$ car ces coordonnées vérifient l'équation de la tangente. **VRAI.**

Exercice 2

On pose, pour tout $x \in [3; 10]$, $f(x) = \frac{2x^2}{x-2}$.

Note : $x - 2 = 0$ ssi $x = 2$, et 2 n'est pas dans l'intervalle $[3; 10]$.

Donc, par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[3; 10]$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$.

On appelle la dérivée d'un quotient de deux fonctions dérivables.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$f'(x) = \frac{4x(x-2) - 2x^2 \times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

2. Déterminer le tableau de variation sur $[3; 10]$.

Comme un carré est toujours positif $(x-2)^2 > 0$ sur $[3; 10]$, et $f'(x)$ a le même signe que son numérateur qui est une expression du second degré ayant pour racines 0 et 4. Elle prend le signe de a à l'extérieur des racines (positif ici). Attention, $0 \notin [3; 10]$.

x	3	4	10
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	18	16	25

On obtient les images à l'aide de la calculatrice.

Par exemple, $f(3) = \frac{2 \times 3^2}{3-2} = 18$.

3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ sur $[3; 10]$.

Sur $[3; 10]$, le minimum est 16, et le maximum est 25.

Donc pour tout $x \in [3; 10]$, $16 \leq f(x) \leq 25$.

4. Justifier que pour tout $x \in [3; 10]$, $f(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x-2}$.

En mettant au même dénominateur, on retrouve l'expression de $f(x)$.

$$2x + 4 + \frac{8}{x-2} = \frac{(2x+4)(x-2) + 8}{x-2} = \frac{2x^2}{x-2} = f(x).$$