EXERCICES DE RÉVISION
DE
1ère SPÉ MATHS
POUR
LA TERMINALE

SOMMAIRE

SECOND DEGRÉ PAGE 3

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES PAGE 6

LES SUITES PAGE 8

DÉRIVATION - FONCTIONS PAGE 11

FONCTION EXPONENTIELLE PAGE 15

VARIABLES ALÉATOIRES PAGE 18

CALCUL VECTORIEL – PRODUIT SCALAIRE PAGE 20

GÉOMÉTRIE REPÉRÉE PAGE 22

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PAGE 24

E3C sujet 0 PAGE 27

SECOND DEGRÉ

1 Étudier une fonction polynôme de degré 2

QCM

Pour les exercices 131 à 134, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 - 8x + 7$ et C_f sa courbe représentative.

131 L'abscisse du sommet de la parabole est :

a -2 b 2 c -1 d 1

132 Le maximum de f est :

a -5 b 25 c 11 d 19

133 L'axe de symétrie de C_f a pour équation :

a $x = 11$ b $y = 11$
c $x = -1$ d $y = -1$

134 La forme canonique de f est :

a $f(x) = -4(x + 1)^2 + 7$
b $f(x) = -4(x - 1)^2 + 11$
c $f(x) = -4(x - 1)^2 + 8$
d $f(x) = -4(x + 1)^2 + 11$

135 ✶ Pour chacune des fonctions polynômes de degré 2 suivantes, de la forme $ax^2 + bx + c$, donner une allure de la courbe, en faisant figurer les éléments de l'énoncé.

1. f a pour racines -2 et 3 et pour coefficient $a = -1$.
2. Le sommet de la courbe représentative de g a pour coordonnées $(1 ; 3)$ et $a = 2$.

136 ✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 12x - 7$.

1. Compléter l'égalité suivante $x^2 + 12x + \ldots = (x + \ldots)^2$.
2. En déduire la forme canonique de f.
3. En déduire le tableau de variations de f, les coordonnées du sommet de la parabole et l'équation de l'axe de symétrie.

137 ✶✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. En utilisant une identité remarquable, déterminer la forme factorisée de f.
3. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole et les coordonnées des points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.

2 Résoudre des équations

QCM

138 L'équation $(2x - 1)(-x + 5) = 0$ a pour solutions :

a $\{1 ; 5\}$
b $\left\{\frac{1}{2} ; 5\right\}$
c $\left\{\frac{1}{2} ; -5\right\}$
d $\{-1 ; -5\}$

Pour les exercices 139 et 140, on considère l'équation $3x^2 - 4{,}5x - 3 = 0$.

139 Le discriminant est égal à :

a $15{,}75$
b $-15{,}75$
c $56{,}25$
d $-56{,}25$

140 Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

a Il n'y a pas de solution.
b $\{2 ; -0{,}5\}$
c $\{-2 ; 0{,}5\}$
d $\{-4{,}5 ; 18\}$

141 ✶ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - x + 1 = 0$
b) $3x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{25} = 0$
c) $-5x^2 - 8{,}5x - 1{,}5 = 0$

142 ✶✶ On cherche un nombre dont la somme avec son inverse est égale à 2,05.

1. Écrire une équation du second degré qui traduit ce problème.
2. Déterminer la valeur du nombre.

3 Résoudre des inéquations

QCM

143 Les solutions de l'inéquation $7(x-1)(x+2) \geqslant 0$ sont :

a $[-1\,;2]$ b $[-2\,;1]$

c $]-\infty\,;-2]\cup[1\,;+\infty[$ d $]-\infty\,;-1]\cup[2\,;+\infty[$

144 L'inéquation $x^2+x+3 \geqslant 0$ a pour solutions :

a $\mathbb{R}$ b Ensemble vide.

c $[0\,;+\infty[$ d $[-3\,;+\infty[$

145 ✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-8x^2-9{,}6x+5{,}12$.

1. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
2. En déduire les solutions de $f(x) \geqslant 0$.
3. En déduire les solutions de $f(x) < 0$.

146 ✶✶ Résoudre l'inéquation suivante.

$$\frac{-x^2+3x-5}{3x^2+0{,}6x-2{,}97} \geqslant 0$$

4 Utiliser les propriétés des racines

QCM

Pour les exercices 147 et 148, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-4x-20$. On admet que f a deux racines distinctes.

147 La somme des deux racines est égale à :

a -10 b 10 c -2 d 2

148 Le produit des deux racines est égal à :

a -10 b 10 c -2 d 2

149 ✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7x^2-5{,}6x-1{,}4$.

1. Vérifier que 1 est une racine de f.
2. Déterminer la valeur de l'autre racine en utilisant la somme ou le produit des racines.

150 ✶✶ Soit f une fonction polynôme du second degré telle que f s'annule en -2 et 5.

De plus on sait que $f(1)=7$.

Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

5 Modéliser et résoudre des problèmes

QCM

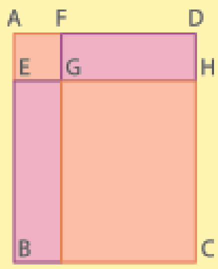
Pour les exercices 151 et 152, on considère la figure suivante.

ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et AD = 4 cm.

E est un point de [AB] tel que AE = x.

On construit le carré AFGE et le rectangle GHCI.

On modélise l'aire de la surface coloriée en orange par une fonction f.



151 L'aire de la partie orange est maximale pour :

a $x=\frac{9}{4}$ b $x=2$

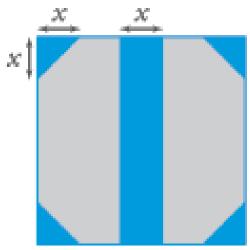
c $x=2{,}5$ d $x=\frac{9}{2}$

152 L'aire de la partie orange est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD lorsque :

a $x=2$ ou $x=2{,}5$ b $x=2$

c $x=2{,}5$ d C'est impossible.

153 ✶ On considère un carré de côté 6 cm. On colorie les quatre coins et une bande comme sur la figure ci-contre.



On note $S(x)$ l'aire coloriée en bleu.

1. Quelles valeurs x peut-il prendre ?
2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x.
3. Quelle est la valeur de $S(x)$ si $x=1$?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $S(x)=13{,}5$ cm² ?

Vers la T^le

Orientation

128 Spécialité Maths

1. Factoriser l'expression $2X^2 - 4X + 2$ et en déduire une factorisation de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$.

2. À l'aide de la question précédente, déterminer le signe de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ en fonction de x, où x désigne un nombre réel.

(Extrait de Sciences Po 2018)

129 Spécialité Maths

Pour chaque question, choisir la ou les bonnes réponses.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $(x-3)^2 = \dfrac{4}{25}(2x-7)^2$.

a) $\left\{\left(\dfrac{1}{9} ; \dfrac{2}{9}\right)\right\}$ **b)** $\left\{\left(\dfrac{1}{9} ; 9\right)\right\}$

c) $\left\{\left(1 ; \dfrac{29}{9}\right)\right\}$ **d)** $\left\{\left(\dfrac{19}{9} ; 9\right)\right\}$

2. Le discriminant du polynôme $3x^2 + x - 10$ est :

a) -121 **b)** 121

c) $\dfrac{5}{3}$ **d)** -2

(Extrait du concours PASS 2018)

130 Spécialité Maths

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^2 + 2mx + 9$.

Pour chaque proposition, répondre vrai ou faux.

a) $f_5(x) = (x+1)(x+9)$

b) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la courbe de f_m passe par le point I(0 ; 9).

c) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) \geqslant 0$.

d) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{m+1}(x) \geqslant f_m(x)$.

(Extrait du concours Advance 2018)

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1 Calculer des probabilités conditionnelles sans arbre

QCM

Le tableau suivant donne la répartition des médailles d'or décernées aux jeux olympiques d'été jusqu'à 2018.

	France	Pas France	Total
Athlétisme	14	872	886
Pas athlétisme	218	3 371	3 589
Total	232	4 243	4 475

On prend une de ces médailles d'or au hasard et on considère les événements A : « La médaille a été gagnée en athlétisme. » et B : « La médaille a été gagnée par une personne (ou équipe) française. »

91 La probabilité $p_A(B)$ est égale à :

a $\frac{14}{232}$ b $\frac{14}{886}$ c $\frac{14}{4475}$

92 La probabilité $p_{\bar{B}}(\bar{A})$ est égale à :

a $\frac{3\,371}{3\,589}$ b $\frac{3\,371}{4\,243}$ c $\frac{3\,371}{4\,475}$

93 ✶ On considère deux événements C et D tels que $p(C) = \frac{2}{3}$ et $p(C \cap D) = \frac{2}{5}$. Calculer $p_C(D)$.

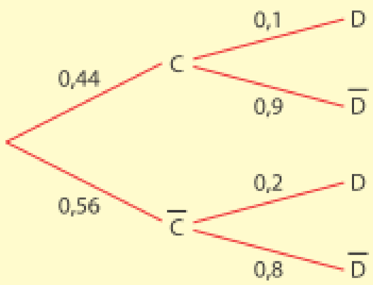
94 ✶ On considère deux événements E et F tels que $p_F(E) = 0{,}7$ et $p(E \cap F) = 0{,}35$. Calculer $p(F)$.

95 ✶✶ Pour les prochaines vacances de Yannis, tout est presque réglé : ses parents lui ont assuré qu'il y a 90 % de chances que la famille parte à Istanbul.
Par ailleurs, Yannis a constaté que pendant cette période de vacances, la probabilité qu'il ne pleuve pas s'il va à Istanbul est 0,85.
Quelle est la probabilité qu'il parte à Istanbul pour ses prochaines vacances et qu'il n'y pleuve pas ?

2 Construire et utiliser un arbre pondéré

QCM

Pour les exercices 96 à 98, on considère deux événements C et D et l'arbre pondéré ci-contre.



96 La probabilité $p_C(\bar{D})$ est égale à :

a 0,1 b 0,9 c 0,2 d 0,8

97 La probabilité $p(D)$ est égale à :

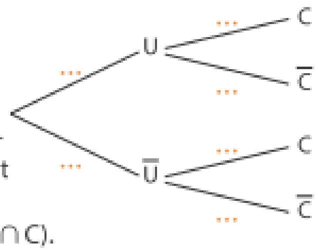
a 0,1 b 0,2 c 0,156 d 0,844

98 La probabilité $p(C \cup D)$ est égale à :

a 0,552 b 0,556

99 ✶ Émilie a une entreprise de plomberie.
75 % de ses interventions sont programmées, le reste est « en urgence ». Pour les interventions programmées, elle utilise son chalumeau 85 % du temps contre 90 % pour les interventions d'urgence.
Émilie part chez un client, on considère les événements :

- U : « L'intervention est en urgence. »
- C : « Émilie va devoir utiliser son chalumeau. »



1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.
2. Calculer $p(U \cap C)$ et $p(\bar{U} \cap C)$.
3. Déterminer la probabilité qu'Émilie doive utiliser son chalumeau pour cette intervention.

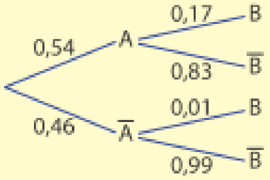
100 ✶✶ Quand elle joue aux cartes, Lucia triche 15 % du temps.
Quand elle triche, la probabilité qu'elle gagne est de 0,9 alors que quand elle ne triche pas, elle est de 0,25.
Lucia joue aux cartes, on considère les événements T : « elle triche » et G : « elle gagne ».
1. Dresser un arbre représentant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'elle ne gagne pas.

3 Inverser un conditionnement

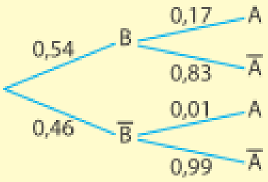
QCM

101 Sur lequel des deux arbres pondérés ci-dessous peut-on lire directement $p_B(\overline{A})$?

a



b

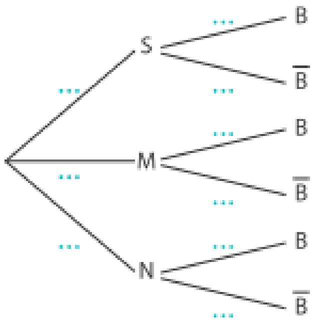


102 ✶ Mia acquiert ses jeux vidéos de deux façons, soit en version « boite », soit en version téléchargée :

- $\frac{1}{6}$ de ses jeux fonctionnent sur la console S dont 25 % en version « boîte » ;
- $\frac{5}{24}$ de ses jeux fonctionnent sur la console M dont 40 % en version « boîte » ;
- $\frac{5}{8}$ de ses jeux fonctionnent sur la console N dont 25 % en version « boîte ».

Quand elle lance un jeu au hasard, on considère les événements S (resp. M, resp. N) : « Le jeu fonctionne sur la console S (resp. M, resp. N) » et B : « Le jeu est en version boîte ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. Calculer $p(S \cap B)$ puis $p(B)$.

3. Mia a lancé un jeu acheté en version boîte, quelle est la probabilité qu'il fonctionne sur la console S ?

4. Mia a lancé un jeu acheté en version boîte, sur quelle console est-il le plus probable qu'il fonctionne ?

103 ✶✶ Une entreprise dispose de deux usines U_1 et U_2 fabriquant des téléphones et des tablettes :

- l'usine U_1 fabrique 70 % des appareils de l'entreprise et 65 % des appareils venant de l'usine U_1 sont des téléphones ;
- 75 % des appareils venant de l'usine U_2 sont des téléphones.

Pour faire des tests, on prélève au hasard un appareil produit par l'entreprise et on considère les événements :

- U_1 : « L'appareil vient de l'usine U_1. »
- A : « L'appareil est une tablette. »

Sachant qu'un appareil est une tablette, quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine U_1 ?

4 Utiliser l'indépendance

QCM

104 On considère deux événements indépendants C et D tels que $p(C) = 0,3$, $p(D) = 0,6$.
La probabilité $p(C \cap D)$ est égale à :

a 0,18

b 0,5

c 0,9

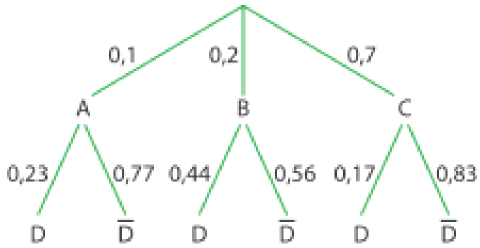
105 On considère un QCM de culture générale de deux questions (il n'y a qu'une bonne réponse par question) : une de SVT avec 3 réponses possibles et une d'histoire avec 4 réponses possibles.
On considère l'expérience aléatoire consistant à répondre aux deux questions au hasard en regardant si la réponse est correcte ou non.

1. Pourquoi peut-on penser qu'il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes ?

2. La représenter par un arbre ou un tableau.

3. Donner la probabilité d'obtenir une réponse correcte.

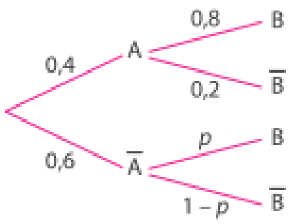
106 ✶ Pour des événements A, B, C et D tels que A, B et C forment une partition de l'univers, on considère la situation représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. Les événements A et D sont-ils indépendants ?

2. Les événements B et D sont-ils indépendants ?

107 ✶✶ On considère deux événements A et B et l'arbre pondéré associé ci-dessous.
Déterminer p pour que les événements A et B soient indépendants.



LES SUITES

1 Modéliser et calculer avec des suites et étudier leur sens de variation

QCM

Pour les exercices 151 à 153, on considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$.

151 La valeur de u_1 est :

a 1 b $\dfrac{3}{2}$ c $3{,}5$ d 5

152 u_n prend la valeur 3 pour :

a $n = 2$ b $n = 3$ c $n = 4$ d $n = 5$

153 L'expression de u_{n+1} est :

a $\dfrac{4n}{n+2}$ b $\dfrac{5n}{n+1}$

c $\dfrac{4n+3}{n+2}$ d $\dfrac{4n}{n+1}$

Pour les exercices 154 à 156, on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = v_n + n - 1$.

154 La valeur de v_1 est :

a -3 b -2 c -1 d 1

155 La valeur de v_2 est :

a -3 b -1 c 2 d 3

156 On a la relation suivante :

a $v_{10} = 17$

b $v_{10} = v_9 + 10$

c $v_{10} = v_9 + 9$

d $v_{10} = v_9 + 8$

Pour les exercices 157 à 159, on considère la suite (w_n) définie par $w_n = n^2 + n$.

157 L'expression de w_{n+1} est :

a $n^2 + n + 1$ b $n^2 + n + 2$

c $n^2 + 3n + 1$ d $n^2 + 3n + 2$

158 L'expression de w_{n-1} est :

a $n^2 + n + 1$ b $n^2 + n - 2$

c $n^2 - n$ d $n^2 - n + 1$

159 L'expression de w_{2n} est :

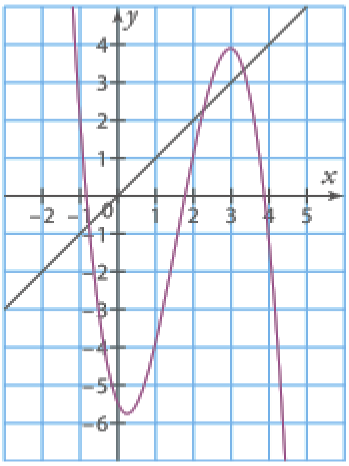
a $2n^2 + 2n$ b $4n^2 + 2n$

c $2n^2 + n$ d $4n$

160 * On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Déterminer graphiquement la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).



161 * Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n + 1$.

Étudier les variations de (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

162 * Modéliser les situations suivantes à l'aide de suites.

a) Un lycée compte 1 500 élèves en 2019. Chaque année, 30 % des élèves du lycée obtiennent le bac et quittent le lycée et 400 nouveaux élèves s'inscrivent.

On note u_n le nombre d'élèves du lycée en $2019 + n$.

b) Camille paye chaque année un abonnement de 200 euros pour un club de sport. Et elle paye 20 euros supplémentaires pour chaque cours auquel elle assiste.

163 * Maud a le choix entre deux abonnements sur une plateforme de commerce en ligne :

- un abonnement A gratuit, mais ensuite chaque livraison lui coûte 2 € ;
- un abonnement B à 30 € l'année, puis chaque livraison lui coûte 50 centimes.

On note u_n le prix que Maud paye pour n livraisons par an avec l'abonnement A et v_n le prix que Maud paye pour n livraisons par an avec l'abonnement B.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
3. Si elle se fait livrer 50 fois dans l'année, quel abonnement est le plus rentable pour Maud ?

164 ** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n$.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2 Reconnaître et utiliser des suites arithmétiques et géométriques et calculer des sommes

QCM

Pour les exercices 165 à 167, on considère la suite (u_n) définie par $u_1 = -2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + 3$.

165 La valeur de u_2 est :

a 3 b 1 c 4 d 0

166 L'expression de u_n en fonction de n est :

a $u_n = -2 + 3n$ b $u_n = -2 \times 3^n$
c $u_n = -5 + 3n$ d $u_n = -1 + 3n$

167 La valeur de u_{10} est :

a 10 b 25 c 28 d 30

Pour les exercices 168 à 170, on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = -6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = v_n \times 2$.

168 La valeur de v_1 est :

a -12 b -3
c 1 d 12

169 L'expression de v_n en fonction de n est :

a $v_n = -6 \times 2^n$ b $v_n = -6 \times 2^{n-1}$
c $v_n = -6 + 2^n$ d $v_n = 6 \times 2^{n-1}$

170 La valeur de v_{10} est :

a $-6\,144$ b $-3\,072$ c 10 d 14

171 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 7$ et $u_4 = 1$. La raison de la suite est :

a -3 b 3 c 6 d 7

172 Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_2 = 1$ et $u_4 = 9$. La raison de la suite est :

a 9 b $\frac{9}{2}$ c 2 d 3

173 La somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 37$ est égale à :

a 666 b 703 c 741 d 1 406

174 La somme $1 + 3 + 5 + \ldots + 49 + 51$ est égale à :

a 1 326 b 1 300 c 1 351,5 d 676

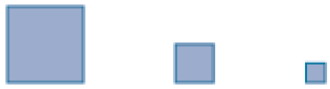
175 La somme $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{10}$ est égale à :

a 88 573 b 29 524 c 88 574 d 44 287

176 ✶ En 2019, Myriam plante un arbre qui mesure 50 cm. Chaque année, l'arbre grandit de 2 cm. Quelle sera sa taille en 2041 ?

177 ✶ On considère un carré de côté 1 cm. À chaque étape, on divise les longueurs du côté du carré par 2.

Étape 0 **Étape 1** **Étape 2**



On note (c_n) la suite correspondant à la longueur des côtés à l'étape n. Ainsi $c_0 = 1$.

On note p_n le périmètre du carré à l'étape n, et a_n l'aire du carré à l'étape n.

1. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire l'expression de c_n.

2. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

178 ✶ Calculer les sommes suivantes.

a) $S = 60 + 61 + 62 + \ldots + 99 + 100$

b) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{14}$

c) La somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique de raison $-0,5$ et de premier terme $u_0 = 4$.

d) $S = v_4 + v_5 + \ldots + v_{15}$ où (v_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $-\frac{1}{9}$.

179 ✶ Lucia travaille dans une entreprise et gagne 2 500 € nets en 2019.

Son patron a décidé de lui augmenter tous les ans son salaire de 4 %.

1. Quel sera son salaire en 2020 ? en 2021?

2. On note u_n le salaire net de Lucia en $2019 + n$.

a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n en justifiant.

b) En déduire le salaire net de Lucia en 2030.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le salaire de Lucia deviendra supérieur à 5 000 € nets.

180 ✶✶ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,2u_n - 40$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 200$.

1. Justifier que la suite (v_n) est géométrique.

2. Déterminer les variations de la suite (v_n)

3. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Vers la T[le]

Orientation

148 Spécialité Maths

Pour chaque question, choisir la bonne réponse (une seule réponse exacte par question).

1. On considère une suite (u_n) arithmétique de raison 3 et une suite (v_n) arithmétique de raison 2, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est :

a) arithmétique de raison 6.
b) géométrique de raison 5.
c) arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.
d) arithmétique de raison 5.

2. On considère une suite (u_n) géométrique de raison 3 et une suite (v_n) géométrique de raison 2, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n \times v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est :

a) géométrique de raison 6.
b) géométrique de raison 5.
c) géométrique de raison 9.
d) géométrique de raison 8.

3. On considère une suite (u_n) géométrique de raison 3 et une suite (v_n) géométrique de raison 2, alors la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n + v_n}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est :

a) géométrique de raison $\frac{5}{2}$.
b) arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.
c) arithmétique de raison $\frac{9}{2}$.
d) ni arithmétique, ni géométrique.

(Extrait du concours AVENIR 2017)

149 Spécialité Maths

Répondre aux questions suivantes par Vrai ou Faux.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

Pour tout entier naturel n, on pose (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2 - 4$.

a) $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ et $u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

b) La suite (v_n) est géométrique.

(Extrait du concours FESIC-Puissance 2017)

150 Spécialité Maths

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1. Au repas d'anniversaire d'Antoine, tout le monde a trinqué ensemble. Chacun a trinqué exactement une fois avec tous les autres. On a compté 45 tintements de verres. Combien y avait-il de couverts ?

a) 12 **b)** 44 **c)** 10 **d)** 90

2. Alexandre place 5 000 € sur un compte rémunéré 3 % l'an pendant 5 ans. Combien récupérera-t-il à l'échéance de son placement ?

a) 7 500 € **b)** 5 750 €
c) 750 € **d)** 5 797 €

(Extrait du concours PASS 2018)

DÉRIVATION - FONCTIONS

1 Calculer un nombre dérivé

QCM

115 Pour $h \neq 0$, le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$, entre 2 et $2 + h$ est :

[a] $h + 4$ [b] 5 [c] h [d] 4

116 Soit h un nombre réel non nul. Si g est une fonction dérivable en -2, alors le nombre dérivé de g en -2 est égal à :

[a] $\dfrac{g(-2+h) - g(-2)}{h}$ [b] $h - 2$

[c] $g(-2 + h)$ [d] $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-2+h) - g(-2)}{h}$

117 Si g est une fonction telle que, pour tout réel h non nul $\dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = -h^2 + 3h - 2$, alors :

[a] g est dérivable en 1 et $g'(1) = 0$.

[b] g n'est pas dérivable en 1.

[c] g est dérivable en 1 et $g'(1) = -2$.

[d] g n'est pas dérivable en 1 car $g'(1) = 0$.

118 Le nombre dérivé en 5 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ est :

[a] 1 [b] $\dfrac{1}{3}$ [c] $-\dfrac{1}{25}$ [d] $-\dfrac{1}{9}$

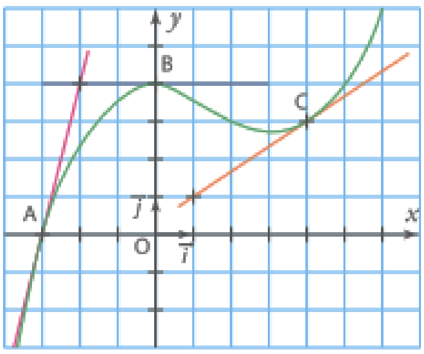
119 ✶ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 - 3$.

1. Calculer $f'(-2)$ en utilisant la définition du nombre dérivé.

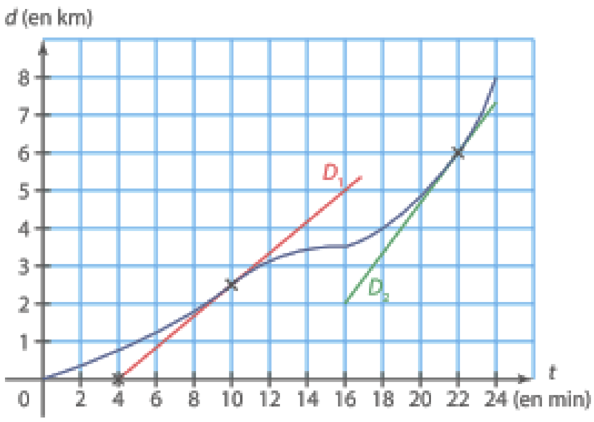
2. Calculer $f'(5)$ en utilisant la fonction dérivée f'.

120 ✶ La courbe d'une fonction f définie sur $[-4 ; 6]$ est représentée ci-contre. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont respectivement tangentes à la courbe aux points A, B, et C.

Déterminer les nombres dérivés $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(4)$.



121 ✶✶ La distance parcourue $d(t)$, en km, par une skieuse de biathlon, en fonction du temps t de course, en min, est modélisée par la courbe ci-dessous. La droite D_1 est tangente à la courbe au point d'abscisse 10, et la droite D_2 est tangente à la courbe au point d'abscisse 22. On rappelle que la vitesse instantanée de la skieuse à un instant t est égale à $d'(t)$.



1. Déterminer la vitesse moyenne de la skieuse sur l'ensemble de son parcours.

2. Déterminer sa vitesse instantanée au bout de 10 minutes de course, puis au bout de 22 minutes, c'est à dire à l'instant $t = 10$, puis à l'instant $t = 22$.

3. À quel moment s'est-elle arrêtée pour effectuer ses cinq tirs à la carabine ?

4. Entre la 20e et la 22e minute, a-t-elle avancé à vitesse constante, a-t-elle accéléré ou a-t-elle ralenti ? Justifier la réponse.

2 Déterminer l'équation d'une tangente

QCM

Pour les exercices 122 à 124, on considère une fonction f et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

122 Si la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D(2 ; −1) passe par le point O (0 ; 0) alors :

a $f'(2) = 0$ b $f'(2) = -\frac{1}{2}$ c $f'(2) = -1$

123 Si la fonction f vérifie $f(1) = -5$ et $f'(1) = 3$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point B d'abscisse 1 a pour équation :

a $y = 3x - 8$

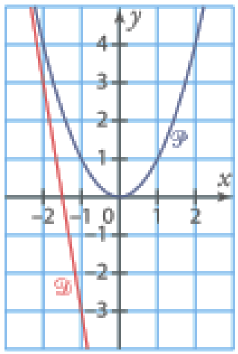
b $y = -5x + 3$

c $y = 3x - 5$

124 Si $f'(6) = 0$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 6 a pour équation :

a $y = 6$ b $y = f(6)$ c $y = 0$

Pour les exercices 125 et 126, on considère la figure ci-contre où est représentée la parabole $\mathscr{P}$ de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ et une droite $\mathscr{D}$.



125 ✱ Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 2.

126 ✱ La droite $\mathscr{D}$ est-elle tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse −3 ?

127 ✱✱ Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$. Sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan est l'hyperbole $\mathscr{H}$. Soit a un nombre réel non nul et A le point de la courbe $\mathscr{H}$ d'abscisse a.

1. Déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{H}$ au point A.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection M et N de Δ avec chaque axe du repère.
3. Démontrer que le point A est le milieu de [MN].

3 Déterminer des fonctions dérivées

QCM

Pour les exercices 128 à 130, on considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u : x \mapsto 3x - 7$ et $v : x \mapsto -5x + 1$.

128 La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel $x \neq \frac{1}{5}$ et on a $\left(\frac{u}{v}\right)'(x)$ égal à :

a $\frac{32}{(-5x+1)^2}$ b $-\frac{32}{25x^2+1}$ c $\frac{-32}{(1-5x)^2}$

129 La fonction $u \times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $(u \times v)'(x)$ égal à :

a -15 b $-30x + 38$ c -32

130 La fonction $2u - v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $(2u - v)'(x)$ égal à :

a 11 b −4 c 1

131 ✱ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \mapsto (-3x + 9)^4$$

Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée h'.

132 ✱ Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 8x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto (4 - x)\sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$

c) $h : x \mapsto \frac{3x^2}{x - 9}$ définie sur $\mathbb{R} \backslash \{9\}$

d) $j : x \mapsto \frac{100}{x^2 - 4x + 7}$ définie sur $\mathbb{R}$

133 ✱ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - 6x + 1$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

134 ✱✱ Soit C une fonction polynôme définie sur [0 ; 50] par $C(x) = ax^2 + bx$ où a et b sont des réels. On sait que $C(10) = 6$. De plus, C est dérivable sur [0 ; 100] et $C'(10) = \frac{1}{2}$.

Déterminer les réels a et b.

1 Étudier une fonction

QCM

111 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$.

a f est croissante sur $]-1\,;0]$

b f est décroissante sur $\mathbb{R}$

c f est croissante sur $\mathbb{R}$

d f est décroissante sur $[0\,;1]$

112 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$, croissante sur $[1\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;+\infty[$.

a $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [6\,;9]$ b $f'(0) = 0$

c $f'(12) < 0$ d $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [4\,;5]$

113 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$$

a g est croissante sur $]-\infty\,;1[$

b g admet un minimum local en $1+\sqrt{2}$

c $g'(x)$ est positive sur $]1\,;+\infty[$

d g est décroissante sur $]1\,;1+\sqrt{2}]$

114 * Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7$$

Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

115 * On considère la fonction h définie sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ par :

$$h(x) = \sqrt{1-2x}$$

Étudier les variations de h sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$.

116 ** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -1.

3. Étudier la position relative de la droite $\mathscr{T}$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$.

117 ** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto -x^3 + bx^2 - 4x$$

où b est un réel.

On sait que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Quelles sont les valeurs possibles de b ?

2 Optimiser une fonction

QCM

118 Une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0\,;50]$ a pour dérivée :

$$f'(x) = \frac{(-x-5)(4x-1)}{(x+1)^2}$$

a La fonction f admet un maximum local en 5 sur I.

b La fonction f admet un minimum local en 0 sur I.

c La fonction f n'a pas d'extremum sur I.

d $f\left(\frac{1}{4}\right)$ est le maximum de f sur I.

119 La somme d'un nombre positif x et de son inverse :

a ne dépasse jamais 10,1 si $x \in\,]0\,;10]$.

b est toujours supérieur ou égale à 2.

c peut être modélisé par une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

d n'admet aucun extremum sur $]0\,;+\infty[$.

120 * Une météorologue envoie à 7h00 du matin un ballon sonde auquel sont attachés des instruments de mesures.

Ce ballon va monter et, tout en montant il va gonfler, jusqu'à une altitude maximum où il explosera et retombera progressivement au sol freiné par un petit parachute.

L'altitude, exprimée en km, de ce ballon sonde en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisé par la fonction h définie sur $[0\,;1{,}7]$ par $h : x \mapsto -12x^3 + 36x$.

À quelle heure atteindra-t-il son altitude maximum ? Et quelle est cette altitude maximum ?

121 ** Le propriétaire d'un terrain souhaite aménager un espace habitable original sous la forme d'une tente pyramidale à base carrée dont la structure serait constituée de quatre grandes perches en bois de 5 m de longueur posées au sol et se rejoignant au sommet. Quelle hauteur de la pyramide faut-il prévoir afin d'avoir un volume maximum ?

Vers la T$^{\text{le}}$

Orientation

113 Spécialité Maths

TICE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x<1 \\ 2x-2 & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$$

1. Représenter la courbe de cette fonction sur Geogebra ou sur calculatrice.
2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et sur $[1\,;+\infty[$.
3. Etudions la dérivabilité de la fonction f en 1.
a) Calculer $f(1)$.
b) Pour $h>0$, exprimer $f(1+h)$ en fonction de h.
En déduire $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.
c) Pour $h<0$, exprimer $f(1+h)$ en fonction de h.
En déduire $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.
d) Que peut-on en conclure ?

114 Spécialité Maths

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle primitive de f, toute fonction F définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$.
1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=3x^2+2x-4.$$
Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x)=x^3+x^2-4x+7$$
est une primitive de f.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=6x^2-3x+1.$$
Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$G(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2+x$$
est une primitive de f.

3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x)=-5x^2+16x-10.$$
Déterminer une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

Vers la T$^{\text{le}}$

Orientation

109 Lors d'une épidémie observée sur une période de onze jours, un institut de veille sanitaire a modélisé le nombre de personnes malades. La durée, écoulée à partir du début de la période et exprimée en jours, est notée t. Le nombre de cas en fonction de la durée t est donné en milliers, par la fonction f de la variable réelle t définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;11]$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre. La droite $\mathscr{T}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et passe par le point A de coordonnées $(10\,;112{,}5)$.

SVT

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Le nombre $f'(t)$ représente la vitesse d'évolution de la maladie, t jours après l'apparition des premiers cas.
a) Déterminer graphiquement $f'(0)$.
b) Déterminer graphiquement le nombre maximal de malades sur la période des 11 jours observés et le moment où il est atteint. Que peut-on dire alors de la vitesse d'évolution de la maladie ?
c) Déterminer graphiquement à quel moment de l'épidémie la maladie progresse le plus.

2. La fonction f est définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;11]$ par $f(t)=-t^3+\dfrac{21}{2}t^2+\dfrac{45}{4}t$.
Étudier les variations de f sur I et vérifier la cohérence de vos résultats avec ceux de la question **1. b)**
3. On appelle « dérivée seconde » de f la dérivée de f' et on la note f''.
a) Déterminer pour tout réel t de I, $f''(t)$.
b) Résoudre l'équation $f''(t)=0$ Quel résultat retrouve-t-on ?

110 **1.** Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$ par $g(x)=-4x^3+9x^2-7$.
a) Étudier les variations de g sur I et dresser un tableau de variations dans lequel on indiquera la valeur des extremums éventuels.
b) En déduire pour tout réel x de I, le signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^2+3x+\dfrac{7}{3x}$.
a) Montrer que, pour tout réel x de I, on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^2}$.
b) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

FONCTION EXPONENTIELLE

1 Calculer avec des exponentielles

QCM

150 $e^4 \times e^{-7}$ est égal à :

a e^{-3} b $\frac{e^4}{e^7}$ c e^{-28}

151 e^{x-4} est égal à :

a $e^x - e^4$

b $\frac{e^x}{e^{-4}}$

c $(e^x)^{-4}$

d $e^x \times e^{-4}$

152 $\frac{e}{(e^3)^4}$ est égal à :

a e^{-12} b e^{-11}

c e^{-6} d e^{-1}

153 $\frac{e^2}{\sqrt{e}}$ est égal à :

a $e^{\frac{3}{2}}$

b e

c $e^2 - \sqrt{e}$

d $e\sqrt{e}$

154 ✶ Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^2 \times e$ **b)** $(e^{2x})^3$ **c)** $\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right)^2$

d) $e^{-3x+1} \times e$ **e)** $\frac{e}{e^{-2}}$ **f)** $\frac{e^{-1} \times (e^3)^2}{e^4}$

155 ✶ Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{2x} \times e^{-x+1}$ **b)** $e^2 - e(e+1)$

c) $e \times \frac{e^4}{e^2}$ **d)** $e^{-2} \times (e^2)^3$

156 ✶ Développer et simplifier les expressions suivantes

a) $e^3(e^{-3} + e^2)$ **b)** $\frac{1}{e}(e^2 + 4e)$

c) $(e - e^{-1})^2$ **d)** $e^{x+2}(e^{-3} - e)$

e) $(e^x - e^2)(e^x + e^2)$ **f)** $(e^x - 2e^{-3})^2$

157 ✶ Développer les expressions suivantes.

a) $e^x(3 - e^{-x} + e^{2x})$ **b)** $(e^4 - 2)^2$ **c)** $(e^x - 3)(e^x + 3)$

158 ✶ Factoriser les expressions suivantes.

a) $5xe^x - x^2e^x$ **b)** $xe^{6-x} + 7\frac{e^6}{e^x}$

c) $e^{2x} - 1$ **d)** $e^{x+2} - 7e^2$

159 ✶✶ Factoriser les expressions suivantes.

a) $e^{4x} - 6e^{2x} + 9$ **b)** $e^{2x} - 3e^x$

c) $e^{2x} - e^{-2x}$ **d)** $4e^{4x} - e^{2x}$

2 Résoudre des équations et inéquations

QCM

160 L'équation $e^x = 1$.

a n'a pas de solution. b a pour solution 0.

c a pour solution 1. d a pour solution e.

161 L'équation $e^x = -1$:

a n'a pas de solution.

b a pour solution $x = 0$.

c a pour solution $x = e^{-1}$.

d a pour solution $x = -e$.

162 L'inéquation $-2e^{x+5} > -2e^8$ a pour solution l'ensemble :

a $]-\infty\,;3]$ b $]-\infty\,;3[$ c $[3\,;+\infty[$ d $]3\,;+\infty[$

163 ✶ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $-e^x + 1 = 0$

b) $e^{-2x+3} = e$

c) $4 - 4e^{5x+2} = 0$

164 ✶ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $e^x - e < 0$

b) $2 - 2e^{3-x} > 0$

c) $\frac{1}{e} - e^{4x+1} > 0$

165 ✶✶ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $xe^x - 3x^2e^x = 0$

b) $2(x+1)e^x - 2(x+1) = 0$

c) $e^{2x} = 2e^x - 1$

3 Étudier des fonctions

QCM

166 La fonction exponentielle :

a) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
b) est monotone sur $\mathbb{R}$.
c) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
d) a un maximum sur $\mathbb{R}$.

167 e^x est :

a) positif ou nul pour tout réel x.
b) strictement positif pour tout réel x.
c) nul pour $x = 0$.
d) négatif pour certaines valeurs de x.

168 La fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est :

a) strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
c) négative.
d) positive.

169 e^{3-x} est :

a) positif si $x < 3$. b) négatif si $x < 3$.
c) positif pour $x \in \mathbb{R}$. d) nul pour $x = 3$

170 Une expression de la dérivée de $x \mapsto -2e^{5x+1}$ est :

a) $-2e^{5x+1}$ b) $-2e^5$
c) $5e^{5x+1}$ d) $-10e^{5x+1}$

171 Une expression de la dérivée de $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ est :

a) $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ b) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ c) 1 d) $-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

172 Soit $f : x \mapsto e^{2x} + 3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

a) $y = 4x + 3$ b) $y = e^2x + 3$
c) $y = 3$ d) $y = 2x + 4$

173 La fonction $x \mapsto e^{-x+2} + x - 2$ est :

a) croissante sur $[2\,;+\infty[$ b) décroissante sur $[2\,;+\infty[$
c) croissante sur $]-\infty\,;2]$ d) décroissante sur $]-\infty\,;2]$

174 ✱ Déterminer une expression de la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto xe^x$
b) $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$
c) $h : x \mapsto (4-x)e^{x+2}$
d) $i : x \mapsto \dfrac{2x+1}{e^x}$

175 ✱ Étudier le signe des expressions suivantes.

a) e^{-x+4}
b) $e^{x+5} - 1$
c) $x(e^x - e)$
d) $(4x+5)(2-2e^{x-1})$

176 ✱ Étudier les variations des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto e^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
b) $g : x \mapsto e^{-3x+4}$ sur $\mathbb{R}$
c) $h : x \mapsto -2e^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
d) $i : \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

177 ✱✱ Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f : \mapsto e^{-3x+4} - 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$
b) $g : \mapsto \dfrac{e^{2x+3}}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
c) $h : \mapsto x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$
d) $i : \mapsto (x^2 + 4x - 1)e^{-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$

178 ✱✱ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{x-2}$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

179 ✱✱ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5e^x + 2}{e^x + 3}$.

Montrer que pour tout réel x, $0 < f(x) < 5$.

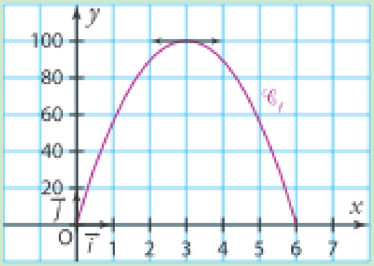
180 ✱✱✱ Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x + 1)\,e^x$.

181 ✱✱✱ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$.

Vers la T^{le} Orientation

147 Maths complémentaires

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».



On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.
Les parties A et B sont indépendantes.

A. Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).
Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.
1. Lire et donner la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

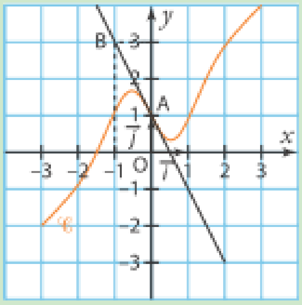
B. Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour.
On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par $g' = 12{,}5e^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jours).
1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 30]$, $g' = 12{,}5 - 1{,}5625x)e^{-0{,}125x+1}$.
2. Étudier le signe de $g' = (x)$ sur l'intervalle $[0 ; 30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?

148 Spécialité Maths

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3 ; 13]$ par la fonction f définie par : $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$
1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
2. Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif. Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable.
Justifier la réponse.

149 Maths expertes

Sur le graphique suivant, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0 ; 1)$ et $(-1 ; 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x, on a $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$
1. a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.
b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
c) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
Déterminer la valeur du réel a.
2. D'après la question précédente, pour tout réel x : $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1 ; 0]$, on a $f(x) > 0$.
b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, on a $f'(x) > 0$.

VARIABLES ALÉATOIRES

1 Définir et utiliser une variable aléatoire

QCM

Pour les exercices 103 à 105, on considère le jeu suivant :
On lance deux fois successivement un dé équilibré à 6 faces. On gagne 3 € par résultat supérieur ou égal à 5 obtenu et on perd 2 € par résultat inférieur à 5 obtenu. Par exemple, si on obtient un 5 puis un 3, on gagne 3 – 2 = 1 €.
Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique associé à ce jeu.

103 Quelles valeurs peut prendre X ?

a 0 ; 1 ; 6
b –4 ; 1 ; 6
c 3 ; 0 ; –2
d Aucune des réponses précédentes

104 $p(X = 6)$ est égale à :

a $\frac{1}{2}$ b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{9}$ d $\frac{1}{4}$

105 La probabilité de perdre de l'argent est :

a 0 b $\frac{1}{9}$ c $\frac{4}{9}$ d $-\frac{2}{9}$

106 ✶ On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

y_i	–10	–2	1	30
$p(Y = y_i)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	…	$\frac{2}{11}$

1. Quelle est la valeur manquante dans ce tableau ?
2. Calculer $p(Y < 0)$ et $p(Y > 0)$.

107 ✶ Une urne contient n jetons (n entier supérieur ou égal à 10) numérotés de 1 à n.
Pour une mise de 2 €, on tire au hasard un jeton. Si le numéro est supérieur ou égal à 8, on récupère la mise de départ et on gagne 10 €, sinon on perd la mise de départ.
Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire.

108 ✶✶ X est une variable aléatoire prenant pour valeur les nombres entiers de 0 à 100 telle que $p(X < 40) = 0,47$ et $p(X = 40) = 0,02$. Déterminer $p(X \geqslant 41)$.

109 ✶✶ On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	0	2	5	8	10
$p(X = x_i)$	0,05	$\frac{2}{5}$	…	$\frac{1}{10}$	…

Calculer $p(X = 10)$ sachant que $p(X < 6) = 0,67$.

3 Calculer, interpréter et utiliser une espérance

QCM

114 On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	–2	0	5	25	100
$p(X = x_i)$	0,4	0,05	0,25	0,15	0,15

L'espérance de X est :

a nulle
b égale à 19,2
c supérieur à 20
d négative

115 L'espérance d'une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu est strictement positive. Quelles affirmations vous semblent-elles correctes ?

a En jouant une seule fois, on est sûr de gagner.
b Sur un grand nombre de parties, on peut espérer gagner de l'argent.
c On peut peut-être perdre de l'argent à ce jeu si on joue peu de fois.
d Ce jeu est équitable.

116 ✶ On tourne une roue dont les secteurs A, B et C ont pour angles respectifs 180° ; 120° et 60°. On mise 2 € puis on tourne la roue. Si on tombe sur la zone B on gagne 3 €, si on tombe sur la zone C on gagne 6 €.
Ce jeu est-il équitable ?

117 ✶ Lorsqu'il joue aux fléchettes, Nathan touche la cible avec une probabilité de $\frac{2}{5}$. Il lance deux fois de suite une fléchette. Les lancers sont indépendants.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de fois où il touche la cible sur les deux lancers.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$.

118 ✶ On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	–4	a	2	5
$p(X = x_i)$	0,24	0,2	0,5	…

Quelle valeur faut-il donner au nombre a pour obtenir $E(X) = 0$?

119 ✶ X est une variable aléatoire modélisant les gains algébriques d'un jeu et telle que $E(X) = -1$.
1. Soit $Y = X - 3$. Calculer $E(Y)$.
2. L'organisateur du jeu souhaite multiplier tous ses gains algébriques par 2,5. Que devient l'espérance de la variable aléatoire associée aux nouveaux gains ?

120 ✶✶ Une urne contient 50 jetons sur lesquels on a inscrit –2 ; 4 ou 17. On tire au hasard un jeton et on gagne (ou perd) la valeur en euros indiquée par le numéro du jeton. Il y a 4 jetons numérotés 17.
Quel est le nombre de jetons sur lesquels est inscrit –2 pour que le jeu soit équitable ?

4 Calculer et utiliser les indicateurs d'une variable aléatoire

QCM

Pour les exercices 121 à 123, on considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	−4	−3	0	1	4	10
$p(X = x_i)$	0,22	0,3	0,1	0,17	0,19	0,02

On pourra utiliser la calculatrice.

121 $E(X)$ est égale à :

a 0,65 b −0,65
c environ 1,33 d environ 0,17

122 $\sigma(X)$ vaut environ :

a 0,32 b 3,32 c 11 d 0

123 La variance de X vaut environ :

a 1,82 b 3,32 c 11,43 d 11

124 * On considère deux jeux dont les gains (en enlevant la mise de départ) et les probabilités de gagner sont donnés ci-dessous.

Gain du jeu 1	−100	10	20	100	500
Probabilité	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

Gain du jeu 2	−1 500	−150	2 000
Probabilité	0,15	0,69	0,16

Donner plusieurs indicateurs permettant de comparer ces deux jeux.

125 ** On lance trois fois successivement une pièce équilibrée.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de Face obtenu sur ces trois lancers.
En utilisant la définition, calculer la valeur exacte de la variance $V(X)$.

Vers la T^le Orientation

101 Option Maths expertes

Mei lance un dé tétraédrique équilibré jusqu'à obtenir la face numérotée 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués pour obtenir le 4.

1. Quelle(s) valeur(s) peut prendre X ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle doive faire deux lancers pour obtenir 4 ?
3. Déterminer $p(X = k)$ pour chacune des valeurs de k.

102 Option Maths expertes

Un livreur a dit à Noé qu'il passerait entre 8h et 12h demain matin et qu'il peut arriver à n'importe quel moment.
Soit X le temps d'attente en minute de Noé à partir de 8h jusqu'à l'arrivée du livreur.

1. Dans quel intervalle se trouve les valeurs prises par X ?
2. **a)** Décrire avec une phrase l'évènement $\{60 \leqslant X \leqslant 150\}$.
b) Quelle est la probabilité de $\{60 \leqslant X \leqslant 150\}$?
3. Selon-vous, quelle est la probabilité que le livreur passe exactement à 9h30 ?

CALCUL VECTORIEL

PRODUIT SCALAIRE

1 Calculer des produits scalaires

QCM

Pour les exercices suivants, quand cela est nécessaire on utilise un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

116 On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :

a $\vec{u}\cdot\vec{v}=-10$ b $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$

c $\vec{u}\cdot\vec{v}=11$ d $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$

117 On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, alors le produit scalaire $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})$ vaut :

a $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})=102$ b $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})=-102$

c $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})=6$ d $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})=-6$

118 On donne $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=6$ et $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{5\pi}{6}$ alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :

a $\vec{u}\cdot\vec{v}=15$ b $\vec{u}\cdot\vec{v}=-9\sqrt{3}$

c $\vec{u}\cdot\vec{v}=9\sqrt{3}$ d $\vec{u}\cdot\vec{v}=9$

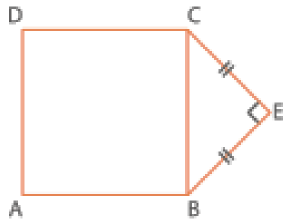
119 On donne $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ alors le produit scalaire $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ vaut :

a $(3\vec{u}-2\vec{v})^2=100$ b $(3\vec{u}-2\vec{v})^2=44$

c $(3\vec{u}-2\vec{v})^2=28$ d $(3\vec{u}-2\vec{v})^2=64$

120 * On considère les points A(2 ; –5), B(0 ; 1), C(–1 ; 2) et D(4 ; 1). **1.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

121 ** ABCD est un carré de côté 4 et BEC est un triangle rectangle et isocèle en E extérieur au carré.



1. Calculer les produits scalaires suivants.

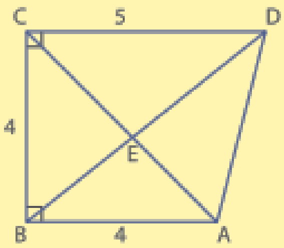
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$ **b)** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}$

2. Déterminer une valeur en degrés de l'angle $\widehat{BAE}$.

2 Déterminer l'orthogonalité de vecteurs ou la perpendicularité de droites

QCM

Pour les exercices 122 à 124, plusieurs réponses sont possibles et on utilise la figure ci-contre.



122 En développant le produit scalaire $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$ à l'aide la figure on obtient :

a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+BC^2$

b $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$

c $AB\times CD+BC^2$

d $BC^2-AB\times CD$

123 Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ vaut :

a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ b $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-4$

c $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=36$ d $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=8\sqrt{10}$

124 Le produit scalaire $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$ vaut :

a $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=20$ b $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=-16$

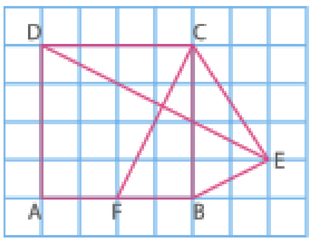
c $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ d $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=16$

125 ** À l'aide de la figure précédente, on souhaite calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$.

1. Introduire le point B à l'aide de la relation de Chasles dans le vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis développer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$.

2. En déduire sa valeur.

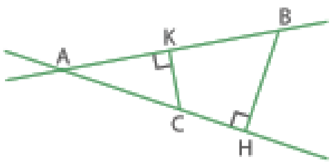
126 * On considère la figure ci-contre.



1. À l'aide du quadrillage, donner les coordonnées de tous les points dans le repère (A ; B ; D).

2. Démontrer que les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires.

127 ** Soit la figure ci-contre où H est le projeté orthogonal de B sur (AC) et K le projeté orthogonal de C sur (AB).



Démontrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Coup de pouce On utilisera la relation de Chasles et un projeté.

3 Calculer des longueurs et des angles

QCM

128 On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.
Une valeur en radian de l'angle entre ces deux vecteurs est :
a $\frac{\pi}{4}$ b $\frac{\pi}{3}$ c $\frac{\pi}{2}$ d $\frac{\pi}{6}$

129 On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.
Une valeur en radian de l'angle entre ces deux vecteurs est :
a $\frac{3\pi}{4}$ b $\frac{2\pi}{3}$ c $\frac{\pi}{6}$ d $\frac{5\pi}{6}$

130 Dans un triangle ABC, on a AB = 7, AC = 5 et BAC = 60°. La longueur BC vaut :
a $BC = \sqrt{74}$ b $BC = \sqrt{39}$
c $BC = \sqrt{109}$ d $BC = 17,5$

131 Dans un triangle DEF, on a : DE = 8, $EF = 5\sqrt{2}$ et $\widehat{DEF} = 45°$. La longueur DF vaut :
a $DF = \sqrt{194}$ b $DF = \sqrt{34}$
c DF = 40 d DF = 5,8

132 * On donne les points A(– 2 ; – 1), B(2 ; 1) et C(– 5 ; 0).
Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés arrondie à 0,01° près.

133 * On donne les points M(2 ; 1), N(– 1 ; 2) et P(0 ; 5).
1. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{MNP}$ en degrés arrondie à 0,01° près.
2. Que peut-on en déduire ?

134 ** On considère les points A(2 ; 3), B(– 1 ; 2), C(1 ; – 1) et D(4 ; 1).
Déterminer la valeur arrondie à 0,01° près de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

4 Déterminer des ensembles de points

QCM

135 On donne deux points A et B tels que AB = 4.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :
a la droite (AB).
b un cercle de rayon AB.
c un cercle de rayon 2.
d un cercle de rayon 8.

136 On donne deux points C et D tels que CD = 6.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 16$ est :
a la droite (CD).
b un cercle de rayon 4.
c un cercle de rayon 3.
d un cercle de rayon 5.

137 On donne deux points P et Q tels que PQ = 12.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -36$ est :
a la droite (PQ)
b le milieu du segment [PQ]
c un cercle de rayon 6
d un cercle de rayon $6\sqrt{2}$

138 On donne deux points E et F tels que EF = 2.
L'ensemble des points tels que $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = -5$ est :
a la droite (EF).
b le milieu du segment [EF].
c l'ensemble vide.
d un cercle de rayon 2.

139 * On donne les points G(– 3 ; 1) et H(4 ; – 2).
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = \frac{11}{2}$ et préciser ses éléments caractéristiques.

140 * On considère les points Y(2 ; – 1) et N(– 3 ; – 2).
1. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MY} \cdot \overrightarrow{MN} = -25$ est un cercle.
2. Préciser le centre et le rayon de ce cercle.

141 ** On donne les points D(3 ; 2), V(– 1 ; 4) et K(– 3 ; – 1). On considère l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MK} = 2$.
1. Vérifier que le point V appartient à cet ensemble.
2. Déterminer cet ensemble.

GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Dans l'ensemble des exercices de cette rubrique, on travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Déterminer une équation cartésienne de droite et un vecteur normal à une droite

QCM

126 Un vecteur normal à la droite d'équation cartésienne $-3x-2y+5=0$ est :

a $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ b $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

c $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ d $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

127 Un vecteur normal à la droite d'équation réduite $y=2x+3$ est :

a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ b $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

c $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ d $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

128 Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ peut être un vecteur normal à la droite d'équation cartésienne :

a $2x-y+3=0$ b $2x+4y+1=0$

c $-x-2y=0$ d $-2x-y+2=0$

129 Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ peut être un vecteur normal à la droite d'équation réduite :

a $y=-x+3$ b $y=3x-1$

c $y=-3x+2$ d $y=x-3$

130 * On donne les points $C(-3\,;4)$ et $D(5\,;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [CD].

2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de [CD].

131 * On considère les points $A(3\,;-2)$, $B(5\,;-1)$ et $C(-2\,;0)$.

1. Déterminer un vecteur normal à la droite (AB).

2. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB).

132 * On donne le point $D(2\,;-1)$ et la droite d d'équation cartésienne $7x-3y-5=0$.

1. Vérifier que le point D n'appartient pas à la droite d.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d passant par D.

3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de D sur d'.

133 ** On considère les points $A(-4\,;1)$, $B(-3\,;-1)$ et $C(2\,;5)$.

1. Déterminer une équation de la hauteur (AH) où H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2. Déterminer les coordonnées du point H.

3. Déterminer l'aire du triangle ABC.

2 Déterminer des projetés orthogonaux

QCM

134 Le projeté orthogonal du point $A(-4\,;3)$ sur la droite d'équation cartésienne $-x+2y=0$ est le point :

a $(0\,;0)$ b $(-2\,;-1)$ c $(2\,;1)$ d $(-3;1)$

135 Le projeté orthogonal du point $B(4\,;2)$ sur la droite d'équation cartésienne $y=-\frac{1}{2}x-1$ est le point :

a $(0\,;0)$ b $(3\,;0)$ c $(-2\,;2)$ d $(2;-2)$

136 Le projeté orthogonal du point $C(1\,;3)$ sur la droite d'équation réduite $y=2x+1$ est le point :

a $(2\,;1)$ b $(0\,;1)$ c $(1\,;3)$ d $(1;1)$

137 * On considère les points $E(-3\,;3)$, la droite d d'équation cartésienne $-x+3y+8=0$ et la droite d' d'équation $x+2y-3=0$.

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur la droite d.

2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal F du point G sur la droite d'.

3. Déterminer l'aire du triangle EFG.

138 ** On considère les points $A(3\,;3)$, $B(0\,;2)$ et $C(-2\,;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point H projeté othogonal du point C sur la droite (AB).

2. Déterminer la position du point H sur la droite (AB).

3. Calculer l'aire du triangle ABC.

3 Déterminer l'équation d'un cercle

QCM

139 Le cercle de centre le point A(3 ; – 1) et de rayon $2\sqrt{3}$ a pour équation :
a $(x+3)^2+(y-1)^2=12$
b $(x-3)^2+(y+1)^2=6$
c $(x+3)^2+(y-1)^2=6$
d $(x-3)^2+(y+1)^2=12$

140 Le cercle de centre le point A(– 2 ; – 3) et de rayon 2 a pour équation :
a $x^2+4x+y^2+6y+9=0$
b $x^2+4x+y^2+6y+4=0$
c $x^2-4x+y^2-6y+9=0$
d $x^2-4x+y^2-6y+4=0$

141 Le centre A et le rayon r du cercle d'équation $x^2-6x+y^2-3y=0$ sont :
a A(6 ; 3) et $r=0$
b A(6 ; 3) et $r=3\sqrt{5}$
c A(3 ; 1,5) et $r=0$
d A(3 ; 1,5) et $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

142 * On considère l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant l'équation $x^2+6x+y^2-y=3$.
1. Cet ensemble passe-t-il par l'origine ? par le point H(– 3 ; 4) ? par le point K(– 3 ; – 3) ?
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [HK].
3. Comparer avec l'équation donnée.

143 * On considère l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant l'équation $x^2-2x+y^2+4y=4$.
1. Cet ensemble passe-t-il par les points D(–2 ;–2) et V(1 ; – 1) ?
2. Justifier qu'il s'agit de l'équation d'un cercle.
3. Donner les coordonnées de son centre et son rayon.

144 ** On considère l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant $4x^2-8x+4y^2+12y=15$.
1. Montrer que cet ensemble est un cercle.
2. En donner son centre A et son rayon r.

145 ** Déterminer pour quelles valeurs de a l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant l'équation $x^2-6x+y^2+4ay+12=0$ est celle d'un cercle.
En donner son centre et son rayon.

4 Déterminer les coordonnées de points d'intersection

QCM

146 Le nombre de points d'intersection entre une droite et un cercle peut-être :
a 0 ou 2 b 1 ou 2
c plus de 2 d de 0 à 2

147 Le cercle d'équation $x^2+y^2=4$ et la droite d'équation $y=3$ ont :
a aucun point commun
b un seul point commun
c deux points communs
d trois points communs

148 Le cercle d'équation $x^2+y^2=4$ et la droite d'équation $x=-1$ ont :
a aucun point commun
b un seul point commun
c deux points communs
d trois points communs

149 * On considère le cercle d'équation $x^2+x+y^2-4y-2=0$.
1. Déterminer le centre et le rayon du cercle.
2. En déduire que le cercle coupe les deux axes du repère.
3. Déterminer les coordonnées de tous les points d'intersection.

150 * On considère le cercle d'équation $x^2-8x+y^2-6y=0$
1. Déterminer les coordonnées de son centre ainsi que son rayon.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ce cercle avec les deux axes du repère.

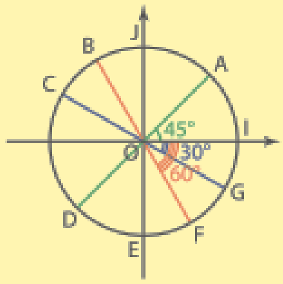
151 ** On donne le cercle de centre F(– 3 ; 0) et de rayon $\sqrt{5}$.
1. Justifier que la droite d'équation $y=1$ coupe le cercle en deux points.
2. Déterminer une équation du cercle.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite et du cercle.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1 Placer un point sur le cercle trigonométrique

QCM

Pour les exercices 91 à 95, on considère le cercle trigonométrique ci-contre.



91 Lequel de ces réels est associé au point A ?

a $\frac{\pi}{4}$ b $2\pi-\frac{\pi}{4}$ c $\frac{3\pi}{4}$

92 Lequel de ces réels est associé au point B ?

a $\frac{\pi}{3}$ b $\frac{5\pi}{3}$ c $\frac{2\pi}{3}$

93 Lequel de ces réels est associé au point C ?

a $\pi-\frac{\pi}{6}$ b $\frac{7\pi}{6}$ c $-\frac{\pi}{5}$

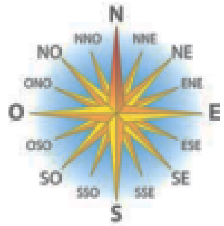
94 Lequel de ces réels associé au point G ?

a $\frac{49\pi}{6}$ b $\frac{59\pi}{6}$ c $-\frac{20\pi}{3}$

95 ✶On considère le cercle trigonométrique précédent.
1. Citer un réel associé au point I.
2. Même question avec les points J, D et F.
3. Quelle relation existe-t-il entre les réels associés aux points C et G ?

96 ✶1. Montrer que les réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{4}$ ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.
2. Même question pour les réels 20π et -12π.

97 ✶ On considère la rose des vents ci-dessous. On admet qu'un réel ayant pour image le sens « E » est 0 et qu'un réel ayant le sens « N » est $\frac{\pi}{2}$.



1. Déterminer un réel ayant pour image le sens « O ».
2. Déterminer un réel ayant pour image le sens « S ».
3. Déterminer un réel ayant pour image le sens « NE ».
4. a) Déterminer un réel ayant pour image le sens « NNE ».
b) Par symétrie, quel réel peut avoir pour image le sens « SSE » ?
c) Par symétrie, quel réel peut avoir pour image le sens « NNO » ?

2 Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel

QCM

98 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

a $-\frac{1}{2}$ b $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d 1

99 $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est égal à :

a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c $-\frac{1}{2}$ d -1

100 Pour $n\in\mathbb{N}$, $\cos(n\pi)$ est égal à :

a 0 b 1 c $(-1)^n$ d -1

101 Pour $n\in\mathbb{N}$, $\sin(n\pi)$ est égal à :

a 0 b 1 c $(-1)^n$ d -1

102 ✶ Calculer.

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$C=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

103 ✶✶ Calculer.

$$D=-\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{41\pi}{3}\right)$$

$$E=\sin\left(-\frac{87\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{21\pi}{6}\right)$$

$$F=\frac{\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{51\pi}{4}\right)\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)}$$

3 Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique

QCM

104 L'égalité $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est vérifiée pour les réels :

a $-\frac{\pi}{6}$ b $-\frac{\pi}{4}$ c $\frac{2\pi}{3}$ d $\frac{\pi}{3}$

105 Parmi les nombres suivants, lesquels sont à la fois solutions de l'équation $\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de l'équation $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$?

a $-\frac{\pi}{4}$ b $\frac{5\pi}{4}$ c $\frac{3\pi}{4}$ d $\frac{\pi}{4}$

106 L'inégalité $\cos(x)\geqslant\frac{1}{2}$ est vérifiée pour les réels :

a $-\frac{\pi}{6}$ b $-\frac{\pi}{4}$ c $\frac{2\pi}{3}$ d $\frac{\pi}{3}$

107 ✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant.

$$\begin{cases}\cos(x)=\frac{1}{2}\\ \sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

108 ✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases}\cos(x)\leqslant-\frac{1}{2}\\ \sin(x)\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

109 ✶ **1.** Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation $2\cos(x)=-\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $[2\pi\ ;\ 4\pi[$ l'équation $2\sqrt{2}\sin(x)=-\sqrt{6}$.

110 ✶✶ **1.** Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $4\cos(x)>-\sqrt{12}$.

2. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$ l'inéquation $\sqrt{2}\sin(x)<1$.

4 Exploiter les propriétés des fonctions sinus et cosinus

QCM

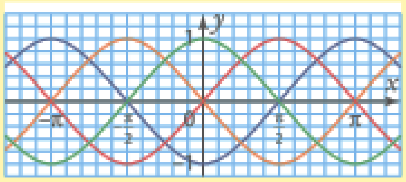
111 Pour tout réel x, on a l'égalité :

a $\cos(4\pi-x)=\cos(x)$ b $\sin(x+3\pi)=\sin(x)$

c $-\sin(x+5\pi)=\sin(x)$ d $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos(x)$

112 Parmi les courbes suivantes, quelle est celle de la fonction $x\mapsto-\cos(x)$?

a la rouge b l'orange c la bleue d la verte



113 Soit f la fonction $x\mapsto\frac{\cos(3x)}{\sin(x)}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Alors :

a f est paire.

b f est impaire.

c f n'est ni paire ni impaire.

d f est 2π-périodique.

114 ✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\cos(x)\sin(3x).$$

1. Tracer la courbe de f sur la calculatrice.

2. Montrer que f est π-périodique. Interpréter graphiquement.

3. Montrer que f est impaire. Interpréter graphiquement.

115 ✶✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$. La courbe représentative de f passe par les points $M\left(-\frac{\pi}{2}\ ;2\right)$ et $N\left(\frac{\pi}{4}\ ;\sqrt{2}\right)$.

1. À l'aide des points M et N, déterminer les réels a et b.

2. En déduire l'expression de f en fonction de x.

3. Montrer que f est 2π-périodique. Interpréter graphiquement.

4. f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

116 ✶✶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sin(x)$. Montrer que la courbe de f est située entre deux droites dont on déterminera les équations.

Vers la T^{le}

88 Spécialité Maths

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ et $g(x) = e^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives associées respectivement à f et g.

1. Tracer f et g à l'aide de la calculatrice.
2. Conjecturer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ et la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
On notera cette abscisse m dans la suite de l'exercice et on admettra que $m \in [0\ ;\ 2\pi]$.
3. Montrer que $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0\ ;+\infty[$.
4. On considère la fonction h définie par $h(x) = g(x) - f(x)$.
On admet que h est dérivable de dérivée h' telle que $h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

a) Étudier le signe de $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ sur $[0\ ;2\pi]$, puis celui de $h'(x)$ sur $[0\ ;2\pi]$.
b) En déduire le tableau de variations de h sur $[0\ ;2\pi]$.
c) En déduire la valeur exacte de m.

89 Spécialité Maths

Soit m un paramètre réel non nul et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $fm(x) = 5x + m\sin(x)$.

1. Montrer que f_m est impaire. Interpréter graphiquement.
2. On suppose que m est positif. Montrer que la courbe représentative de f_m est située entre deux droites dont on déterminera les équations.

90 Spécialité Maths

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives associées respectivement à f et g.

1. Montrer que f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant g(x)$. Interpréter graphiquement.
3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

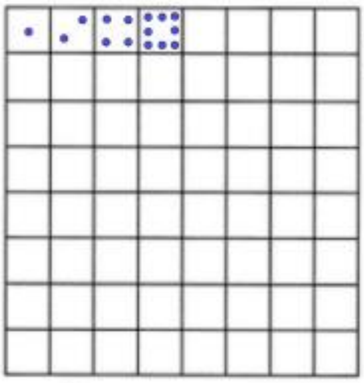
4. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = f(n)$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $-e^{-n} \leqslant v_n \leqslant e^{-n}$.
b) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. On admet également le théorème suivant dit « théorème des gendarmes » : « Soit N un entier naturel et $\mathscr{L}$ un réel. Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que, pour tout $n > N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \mathscr{L}$. Alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathscr{L}$. »
Que peut-on en déduire concernant la suite (v_n) ?

E3C sujet 0

Exercice 1 (5 points)

Une ancienne légende raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un vieux sage. Son roi voulut le remercier en lui accordant n'importe quel cadeau en récompense. Le vieux sage demanda qu'on lui fournisse un peu de riz pour ses vieux jours, et plus précisément qu'on place :
un grain de riz sur la première case du jeu qu'il venait d'inventer, puis deux grains de riz sur la case suivante, puis quatre grains de riz sur la troisième case, et ainsi de suite, en doublant le nombre de grain de riz entre une case et la suivante, et ce jusqu'à la 64^e case (puisqu'un plateau de jeu d'échecs comporte 64 cases).



On note u_1 le nombre de grains de riz présents sur la première case, u_2 le nombre de grains sur la deuxième case, et ainsi de suite jusqu'à la 64^e case.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et en préciser les éléments caractéristiques. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n.
4. Calculer le nombre de grains de riz qui doivent être disposés sur le plateau pour satisfaire à la demande du vieux sage.
5. On veut écrire une fonction en langage Python qui détermine à partir de quelle case, le vieux sage disposera d'au moins R grains de riz. Une ébauche de cette fonction est donnée ci-contre.

   Recopier et compléter cette fonction afin qu'elle renvoie le résultat désiré.

```python
def nb_case(R):
    case = 1
    u = 1
    somme = u
    while somme .....:
        u = ...
        s = ...
        case = case + 1
    return case
```

Exercice 2 (5 points)

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :

R : « le jeton tiré est rouge »,
V : « le jeton tiré est vert »,
G : « le jeton tiré est gagnant ».

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité de l'événement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant ».

3. Soit $P(G)$ la probabilité de tirer un jeton gagnant. Montrer que $P(G) = \frac{2}{5}$.

4. Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.

5. On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ». Expliquer votre démarche.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.
On note C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2. Résoudre dans R l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

4. Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.
Vérifier que pour tout réel x: $f(x) = (x - 1)(x^2 + 8x + 19)$.

5. Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur R.

Exercice 4 (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(3\,;1)$, $B(-3\,;3)$ et $C(2\,;4)$.

1. Montrer que l'équation $x + 3y - 6 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d, perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point C.

3. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

4. Calculer la distance AB et déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.

5. En déduire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.