Contrôle n° 1
Sujet 1

Exercice 1 (7 points)
Déterminer la limite des suites suivantes (on justifiera les résultats) :

1. pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = (\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 3)(n^2 + 5^n)$.
2. pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{2n - n^2}{3n^2 + 1}$
3. pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3 + 5\sin(n)}{n}$
4. pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = n \times (-1)^n - n^2$

Exercice 2 (13 points)
Sur un site de partage de vidéos en ligne, la chaîne de Jimi a 50 000 abonnés. On admet que chaque année, 10 % de ses anciens abonnés ne maintiennent pas leur abonnement (les autres le conservent), et que dans le même temps, il arrive 15 000 nouveaux abonnés.
On note $a_0 = 50$, et pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n le nombre d'abonnés (en milliers) à la chaîne de Jimi la $n^{\text{ième}}$ année.
On a donc

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ a_{n+1} = 0,9a_n + 15.$$

On se propose d'étudier la suite (a_n) suivant deux méthodes.

1. **Première méthode**
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \leqslant 150$.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
2. **Deuxième méthode**
   On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier n par
   $$v_n = a_n - 150.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de a_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (a_n).
3. **Algorithme**
   (a) Écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier n_0 tel que $a_{n_0} \geqslant 120$.
   (b) Programmer l'algorithme à la calculatrice, donner la valeur de n_0 et interpréter le résultat obtenu.
4. **Bonus** (1 point)
   On pose pour tout $n \geqslant 0$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Déterminer la limite de S_n.

Contrôle n° 1
Sujet 2

Exercice 1 (7 points)
Déterminer la limite des suites suivantes (on justifiera soigneusement) :

1. pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \left(\frac{1}{n} - 3\right)\left(5 - \frac{1}{2^n}\right)$.
2. pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{2n - n^2}{n+1}$
3. pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}$
4. pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = n \times \cos(n) - n^2$

Exercice 2 (13 points)
Sur un site de partage de vidéos en ligne, la chaîne de Jimi a 20 000 abonnés. On admet que chaque année, 80 % de ses anciens abonnés maintiennent leur abonnement (les autres partent), et que dans le même temps, il arrive 6 000 nouveaux abonnés.
On note $a_0 = 20$, et pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n le nombre d'abonnés (en milliers) à la chaîne de Jimi la $n^{\text{ième}}$ année.
On a donc

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ a_{n+1} = 0,8a_n + 6.$$

On se propose d'étudier la suite (a_n) suivant deux méthodes.

1. **Première méthode**
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \leqslant 30$.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
2. **Deuxième méthode**
   On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier n par
   $$v_n = a_n - 30.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de a_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (a_n).
3. **Algorithme**
   (a) Écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier n_0 tel que $a_{n_0} \geqslant 29$.
   (b) Programmer l'algorithme à la calculatrice, donner la valeur de n_0 et interpréter le résultat obtenu.
4. **Bonus** (1 point)
   On pose pour tout $n \geqslant 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Déterminer la limite de S_n.