BTS CRSA2. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 1

Exercice 1 (2 points)
Compléter la propriété de cours :
Soit A une primitive de la fonction a sur I.
Les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (8 points)
Dériver les fonctions suivantes.

1. A est définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = -5x + 16$.
   $A'(x) = -5$
2. B est définie sur $\mathbb{R}$ par $B(x) = 11x^2 - x - 9$.
   $B'(x) = 22x - 1$.
3. C est définie sur $\mathbb{R}$ par $C(x) = \cos(8x + \pi)$.
   $C'(x) = -8\sin(8x + \pi)$
4. D est définie sur $\mathbb{R}$ par $D(x) = (2x + 5)\sin x$.
   $D'(x) = 2\sin(x) + (2x + 5) \times \cos(x)$.
5. E est définie sur $]0; +\infty[$ par $E(x) = 4\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-3x} + \ln(x)$.
   $E'(x) = 4\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{x}$.
6. F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$
   $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2 + 1) - \mathrm{e}^x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

Exercice 3 (4 points)
Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes suivantes :

1. $y' + 10y = 0$
   On pose $a(x) = 10$, puis $A(x) = 10x$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-10x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. $y' = 6xy$
   $y' - 6xy = 0$
   On pose $a(x) = -6x$, puis $A(x) = -3x^2$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{3x^2}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (3 points)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène suivante $y' + (x - 2)y = 0$.
   On pose $a(x) = x - 2$, puis $A(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-(0{,}5x^2 - 2x)} = k\mathrm{e}^{-0{,}5x^2 + 2x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la solution f qui vérifie la condition initiale $f(0) = -1$
   $f(x) = -1$ ssi $k \times \mathrm{e}^0 = -1$ ssi $k = -1$.
   La solution vérifiant $f(0) = -1$ est $f(x) = -\mathrm{e}^{-0{,}5x^2 + 2x}$.

Exercice 5 (3 points)
Résoudre l'équation différentielle suivante $5y' - 3y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = -4$.
L'équation équivaut à $y' - 0,6y = 0$.
$a(x) = -0,6$, et $A(x) = -0,6x$.
Donc les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{0{,}6x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
Ensuite, la conditin initiale $f(0) = -4$ équivaut à $k\mathrm{e}^0 = -4$, $k \times 1 = -4$, soit $k = -4$.
La solution de l'équation $5y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 4$ est la fonction définie par $f(x) = -4\mathrm{e}^{0{,}6x}$.