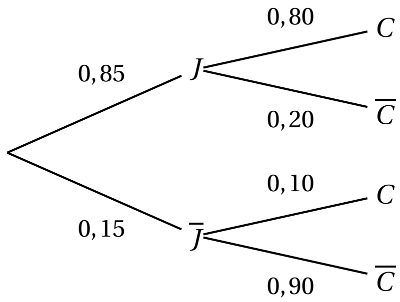
Correction du bac blanc n° 2

Exercice 1 (5 points)

1. (a) L'arbre pondéré est le suivant :



(b) D'après l'arbre :

$$p\left(\overline{J}\cap C\right) = 0{,}15\times 0{,}10 = 0{,}015.$$

(c) J et $\overline{J}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$p(C) = p\left(\overline{J}\cap C\right) + p(J\cap C) = 0{,}015 + 0{,}85\times 0{,}80 = 0{,}695.$$

(d) Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$p_C\left(\overline{J}\right) = \frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)} = \frac{0{,}015}{0{,}695} \approx 0{,}0216.$$

2. À l'aide de la calculatrice : $p(87 \leqslant X \leqslant 89) \approx 0{,}2417$.

3. De même $p(X \geqslant 91) \approx 0{,}3085$.

Partie B

1. L'échantillon est de taille $n = 120$. L'hypothèse formulée est que la probabilité p qu'une huître possède une masse supérieure à 91 g est $p = 0{,}60$. On a alors :
   — $n \geqslant 30$;
   — $np = 72 \geqslant 5$;
   — $n(1-p) = 48 \geqslant 5$.
   Les trois conditions pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont réalisées, et cet intervalle I est donné par :

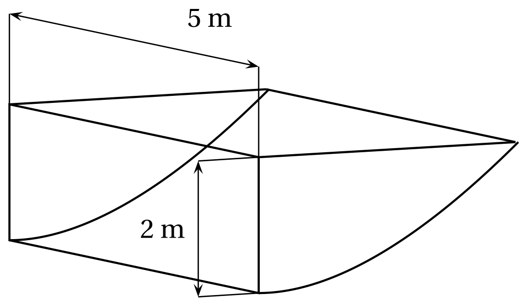
$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}5123\ ;\ 0{,}6877]$$

2. La fréquence observée d'huîtres pesant plus de 91 g est $F = \dfrac{65}{120} \approx 0{,}5417$.
   On a $F \in I$, l'hypothèse selon laquelle $p = 0{,}60$ ne peut être rejetée.

Exercice 2 (6 points)
Commun à tous les candidats

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

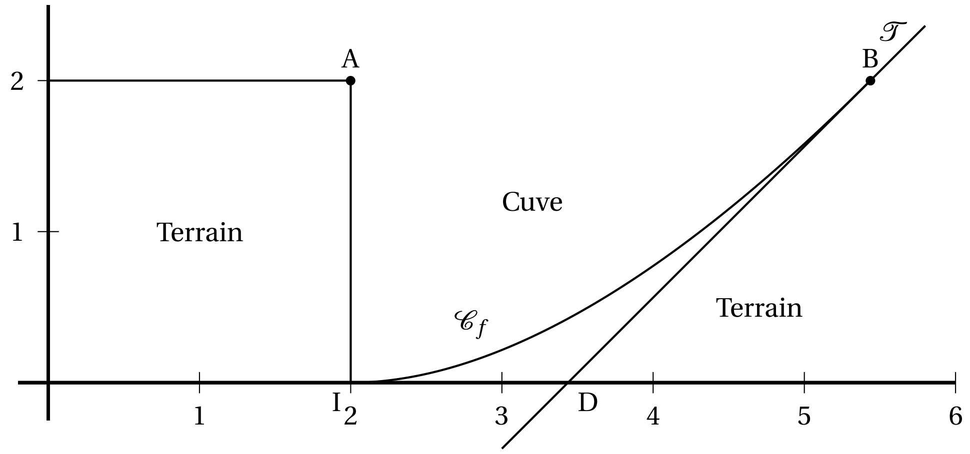
- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



Cette cuve est schématisée ci-contre.
La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

Solution: $f(x_B) = f(2\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} \times \ln\left(\frac{2\mathrm{e}}{2}\right) - 2\mathrm{e} + 2 = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2 = 2 = y_B$ donc $B \in \mathscr{C}_f$

$f(x_I) = f(2) = 2 \times \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_I$ donc $I \in \mathscr{C}_f$

f est dérivable sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$

$$f = uv - u + 2 \Longrightarrow f' = u'v + uv' - u' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\forall x \in [2\ ;\ 2\mathrm{e}]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et on a $f'(2) = 0$ donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale en I
L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

   (a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

   > **Solution:** $\mathscr{T}\ :\ y = f'(2\mathrm{e})(x-2\mathrm{e}) + f(2\mathrm{e})$ or $f'(2\mathrm{e}) = 1$ et $f(2\mathrm{e}) = 2$
   > On a donc $\mathscr{T}\ :\ y = x + 2 - 2\mathrm{e}$ et on en déduit $D(2\mathrm{e}-2\ ;\ 0)$

   (b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2\mathrm{e}$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

   > **Solution:** $\mathscr{A}_{ABI} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AI = (2\mathrm{e}-2)m^2$
   > $\mathscr{A}_{AIDB} = \dfrac{(AB+ID)\times AI}{2} = (4\mathrm{e}-6)m^2$
   > La longueur de la cuve étant de 5 m, on en déduit $10\mathrm{e}-10 \leqslant V \leqslant 20\mathrm{e}-30$
   > Autrement dit le volume de la cuve est compris entre 17,183 m^3 et 24,366 m^3

3. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$, la fonction G définie par

   $$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

   est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   > **Solution:** G est dérivable sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$
   > $G = uv - \dfrac{1}{2}u \Longrightarrow f' = u'v + uv' - \dfrac{1}{2}u'$ avec $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$
   > $\forall x \in [2\ ;\ 2\mathrm{e}]$, $G'(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}x = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = g(x)$.
   > Donc G est bien une primitive de la fonction g sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$

   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$.

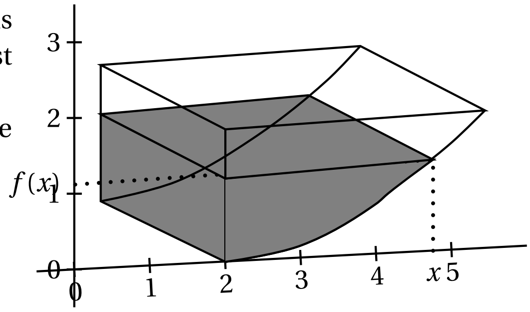
   > **Solution:** $f(x) = g(x) - x + 2$
   > donc $F(x) = G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$ est primitive de f sur $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$

   (c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

   > **Solution:**
   > $S = \displaystyle\int_2^{2\mathrm{e}} (2-f(x))\ dx = \Big[2x - F(x)\Big]_2^{2\mathrm{e}} = (4(\mathrm{e})F(2\mathrm{e})) - (4-F(2)) = (\mathrm{e}^2) - (3) = \mathrm{e}^2 - 3$
   > $V = 5S \approx 22m^3$

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2e],



$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$

1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre?

> **Solution:** on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 1$
> On sait qu'il existe un unique x_0 vérifiant cette équation car f est continue et strictement croissante sur [2 ; 2e] à valeurs dans [0 ; 1] donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, x_0 existe et est unique.
> Par balayage on a $x_0 \approx 4,311$
> $v(4,311) \approx 7m^3$

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel
	b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur 2 e
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	c prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $v(c) < V/2$, alors :
	a prend la valeur c
	Sinon
	b prend la valeur c
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

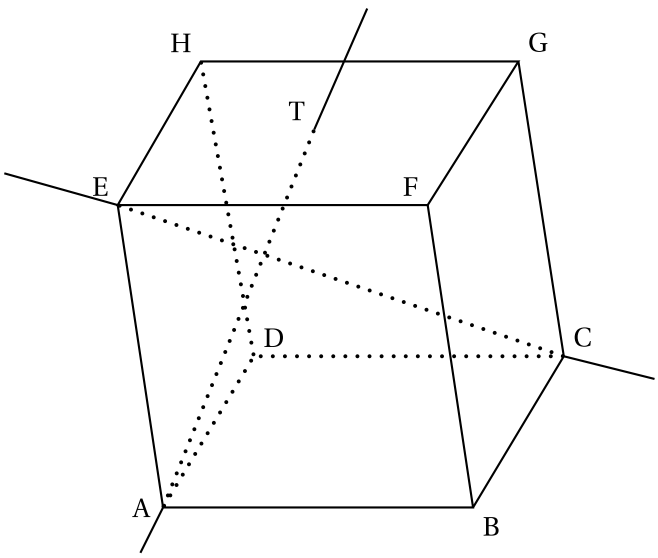
> **Solution:**
> L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve correspondant à $10^{-3}m^3$ près à un remplissage à moitié de la capacité totale.

Exercice 3 (4 points)

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\mathrm{i}, \quad b = -\sqrt{3}+\mathrm{i}, \quad c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{et} \quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : VRAIE
   On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(-\sqrt{3}-2\,;\,-1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\left(-1\,;\,\sqrt{3}-2\right)$.
   D'où $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(2-\sqrt{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
   Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : FAUSSE
   On calcule successivement :
   $\mathrm{EB}^2 = 8$; $\mathrm{EC}^2 = 8$ et $\mathrm{ED}^2 = \dfrac{19}{4}+2\sqrt{3} \neq 8$.
   Les points B, C et D ne sont pas équidistants de E.
3. **Affirmation 3** : VRAIE
   Une équation du plan (IJK) est $x+y+z=1$. Un point commun à ce plan et à la droite $\mathcal{D}$ a ses coordonnées telles que :
   $2-t+6-2t-2+t=1 \iff 5=2t \iff t=\dfrac{5}{2}$.
   Ce point commun existe donc et a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
4. **Affirmation 4** : VRAIE
   (EFGH) est un carré donc le milieu T de [HF] est le milieu de [EG].
   On a donc $\overrightarrow{\mathrm{ET}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EG}}$.
   En prenant par exemple le repère $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ calculons le produit scalaire :
   $\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{ET}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right) =$
   $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}$.
   Or ABCDEFGH est un cube, donc $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} = 0$.
   De plus $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = -\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ et $\mathrm{EG} = c\sqrt{2}$, c étant la mesure du côté du cube.
   Finalement : $\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}} = -c^2+\dfrac{1}{2}\left(c\sqrt{2}\right)^2 = -c^2+c^2 = 0$.
   Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.



Exercice 4 (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   (b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. (a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

   — **Initialisation.** On a $u_1 = 3,4$ et $\frac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   — **Hérédité.** Soit n entier naturel non nul, et $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire que :

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^k \qquad \text{(HR)}$$

   on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$.

   D'après (HR) :

$$\begin{array}{rcll} u_n & \geqslant & \frac{15}{4} \times 0,5^n & \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\ \frac{1}{5}u_n & \geqslant & \frac{3}{4} \times 0,5^n & \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0,5^n : \\ \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n & \geqslant & \frac{3}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n & \text{c'est-à-dire :} \\ u_{n+1} & \geqslant & \frac{15}{4} \times 0,5^n & \end{array}$$

   Or, pour tout entier naturel n, $0,5^n \geqslant 0,5^{n+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$$

   et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.

   La propriété est vraie 1 et si elle est vraie à un rang non nul, n elle est vraie au range suivant $n+1$.

   On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel non nul $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

   — **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

   (b) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n \\ & = & 3 \times 0,5^n - \frac{4}{5}u_n \\ & = & \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n\right) \end{array}$$

   D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} \\
&= \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n \\
&= \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n \\
&= \frac{1}{5}\left(u_n - 10 \times 0{,}5^n\right) \\
&= \frac{1}{5} v_n.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

(b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

(c) $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que $u > 0{,}01$	(1)
	n prend la valeur $n+1$	(2)
	u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0{,}5^{n-1}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	