

Compléments sur la dérivation

I Rappels sur la dérivation

Définition du nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Équation de la tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Théorème fondamental :

Si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .

Si $f' \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .

Extremum : soit I un intervalle ouvert, $a \in I$

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .

Dérivée des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$)	$f'(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \geq 1$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \leq -1$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$I = \mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I . $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
Si de plus v ne s'annule pas sur I ,	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

II Composition de fonctions

Définition

Soient $u : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. La fonction $g \circ u$ est alors définie sur I par :

$$\text{pour tout } x \in I, (g \circ u)(x) = g(u(x)).$$

Pour que $g \circ u$ soit bien définie, il faut que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

Exercice 1

$$u(x) = x^2 + 6, g(x) = e^x.$$

Déterminer les expressions de $g \circ u$ et de $u \circ g$. Comparer.

Remarque

Pour obtenir l'expression de $(g \circ u)(x)$, on remplace x par $u(x)$ dans l'expression de g .

Dans une composée, l'ordre des fonctions a son importance (de façon générale, $g \circ u \neq u \circ g$).

Exercice 2

Préciser des fonctions g et u pour que $f = g \circ u$.

1. $f(x) = (1 - 4x)^5$
2. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

III Dérivée d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soient $u : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables

Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I, f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

On retiendra

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'.$$

Remarque (des cas particuliers)

Soit u une fonction dérivable sur I .

1. Si u ne s'annule pas sur I , $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
3. Si $n \leq -1$ et si u ne s'annule pas sur I , $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$
4. Si $u > 0$ sur I , $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
5. $(e^u)' = u'e^u$.

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes, préciser l'intervalle de validité.

1. $f(x) = (1 - 4x)^5$
2. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$
3. $f(x) = e^{x^2 - 3x}$
4. $f(x) = \frac{1}{(2x - 10)^3}$

IV Notion d'équation différentielle

Définition

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue (souvent notée y) est une fonction, et qui donne une relation entre y , sa dérivée y' (éventuellement y'' , des dérivées successives), et la variable x sur un intervalle donné.
- Une fonction qui vérifie l'équation différentielle est une solution de cette équation.
- Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les solutions de l'équation.
- Une fonction donnée qui est solution est appelée une solution particulière.

Exercice 4

Soit l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : y'(x) = 4x + 1$.

Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^2 + x + 3$ est une solution de cette équation différentielle.

Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle $F' = f$.

Sur l'exemple précédent, en posant $f(x) = 4x - 1$, et $F(x) = 2x^2 + x + 3$, on peut affirmer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (calcul mental, recherche de primitives)

Donner une fonction solution des équations différentielles suivantes :

1. Sur $\mathbb{R}$, $y'(x) = 1 + 8x$
2. Sur $\mathbb{R}$, $y'(x) = x^3$
3. Sur $]0; +\infty[$, $y'(x) = \frac{1}{x^2}$

Exemples d'équations différentielles

Équation différentielle	Commentaire
$y' + 2y = 4$	du premier ordre, linéaire, à coefficients constants
$y'' + 5y = 3$	du second ordre (y''), linéaire, à coefficients constants
$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$	1 ^{er} ordre, non linéaire, à coefficients constants. La notation $\frac{dy}{dx}$ est souvent utilisée en physique En mathématiques, on note plutôt y' ou $y'(x)$.
$2y - xy' = xe^x$	du premier ordre, non linéaire, à coefficients non constants.

Exercice 6

Reconnaître parmi ces 3 fonctions celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 4$.
 $F(x) = 2e^{-x} + 4$; $G(x) = 2e^{-2x} + 2$; $H(x) = e^{-2x} + 2$.

Exercice 7

Trouver une solution des équations différentielles suivantes.

1. $y' = 0$
2. $y' = y$
3. $y' + y = 7x + 7$

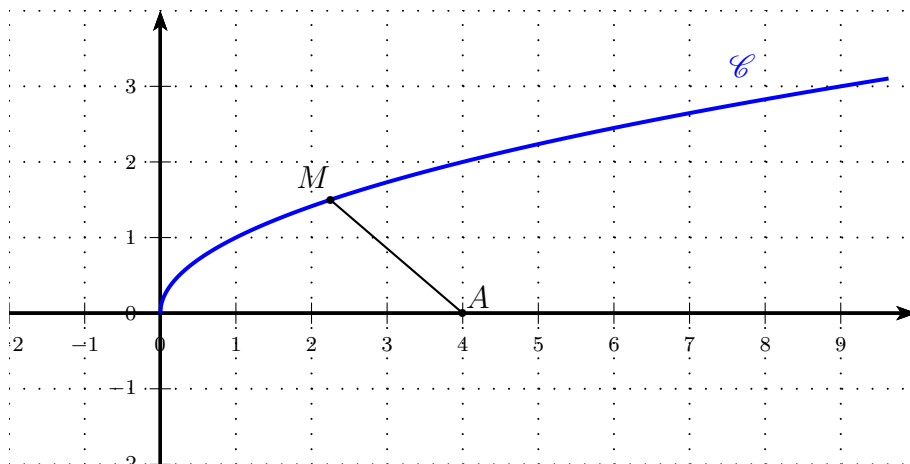
Exercice 8

Montrer que la fonction g définie par $g(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = e^{-x}$.

V Exercices

Exercice 9 (distance d'un point à une courbe)

Soit f la fonction racine carrée, dont on considère la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.



On considère le point fixe $A(4;0)$, et le point mobile M appartenant à $\mathcal{C}$ et d'abscisse x . Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $M(x; \sqrt{x})$.

L'objectif est de déterminer la valeur de x pour laquelle la distance AM est minimale.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, que peut-on conjecturer sur le minimum de la distance AM lorsque x décrit $[0; +\infty[$?
2. Soit $x \geq 0$. Exprimer la distance AM en fonction de x . On appelle d cette fonction qui à x associe la distance AM .
3. Étudier les variations de la fonction d , et démontrer la conjecture précédente.
4. Justifier qu'au point M_0 qui rend la distance AM minimale, la tangente à la courbe de la fonction f est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM_0}$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle en A , de périmètre 20. On pose $BC = x$ avec $0 \leq x \leq 10$.

1. Montrer que l'aire du triangle ABC est $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{100 - 10x}$, pour $0 \leq x \leq 10$.
2. (a) Étudier les variations de f sur $[0; 10]$.
 (b) Pour quelle valeur de f l'aire est-elle maximale ? Quelle est alors la nature du triangle ?
 (c) Déterminer x tel que l'aire du triangle soit 10.