

# Complément sur la dérivation

## I Composition de fonctions

### Définition

Soient  $u : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions. La fonction  $g \circ u$  est alors définie sur  $I$  par :

$$\text{pour tout } x \in I, (g \circ u)(x) = g[u(x)].$$

Pour que  $g \circ u$  soit bien définie, il faut que pour tout  $x \in I$ ,  $u(x) \in J$ .

### Exercice 1

$$u(x) = x^2 + 6, g(x) = e^x.$$

Déterminer les expressions de  $g \circ u$  et de  $u \circ g$ . Comparer.

### Remarque

Dans une composée  $g \circ u$ , l'ordre des fonctions a son importance.

### Exercice 2

Préciser les fonctions  $g$  et  $u$  pour que  $f = g \circ u$ .

1.  $f(x) = (1 - 4x)^5$
2.  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

## II Dérivée d'une fonction composée

### Théorème (admis)

Soient  $u : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions dérivables

Alors la fonction  $f : x \mapsto g(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et

$$\text{pour tout } x \in I, f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

On retiendra

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'.$$

### Remarque (des cas particuliers)

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $I$ .

1. Si  $u$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ .
2. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ .
3. Si  $n \leq -1$  et si  $u$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$
4. Si  $u > 0$  sur  $I$ ,  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .
5.  $(e^u)' = u'e^u$ .
6. Si  $u > 0$  sur  $I$ ,  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
7.  $(\sin u)' = u' \cos(u)$ .

8.  $(\cos u)' = -u' \sin(u)$

### Exercice 3

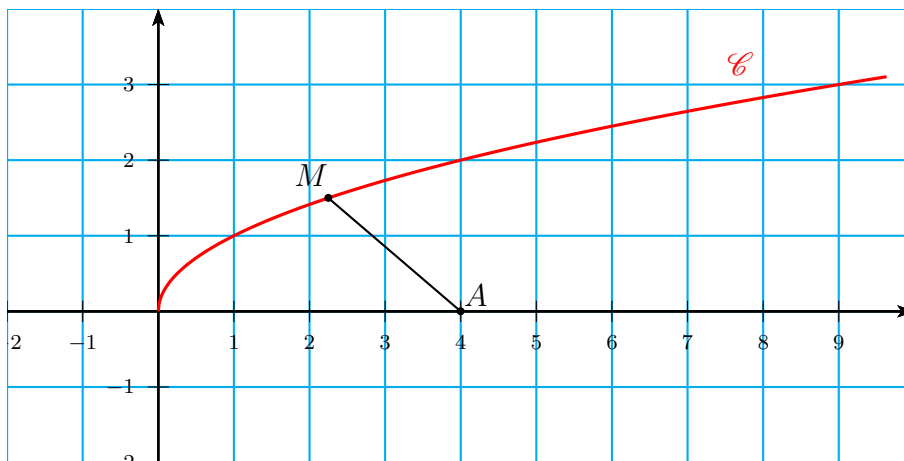
Dériver les fonctions suivantes, préciser l'intervalle de validité.

1.  $f(x) = (1 - 4x)^5$
2.  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$
3.  $f(x) = ex^2 - 3x$
4.  $f(x) = \frac{1}{(2x - 10)^3}$

## III Exercice

### Exercice 4 (distance d'un point à une courbe)

Soit  $f$  la fonction racine carrée, dont on considère la courbe  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormé.



On considère le point fixe  $A(4; 0)$ , et le point mobile  $M$  appartenant à  $\mathcal{C}$  et d'abscisse  $x$ . Ainsi, pour tout  $x \geq 0$ ,  $M(x; \sqrt{x})$ .

L'objectif est de déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la distance  $AM$  est minimale.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, que peut-on conjecturer sur le minimum de la distance  $AM$  lorsque  $x$  décrit  $[0; +\infty[$ ?
2. Soit  $x \geq 0$ . Exprimer la distance  $AM$  en fonction de  $x$ . On appelle  $d$  cette fonction qui à  $x$  associe la distance  $AM$ .
3. Étudier les variations de la fonction  $d$ , et démontrer la conjecture précédente.
4. Justifier qu'au point  $M_0$  qui rend la distance  $AM$  minimale, la tangente à la courbe de la fonction  $f$  est orthogonale au vecteur  $\overrightarrow{AM_0}$ .

### Exercice 5

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ , de périmètre 20. On pose  $BC = x$  avec  $0 \leq x \leq 10$ .

1. Montrer que l'aire du triangle  $ABC$  est  $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{100 - 10x}$ , pour  $0 \leq x \leq 10$ .
2. (a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; 10]$ .  
 (b) Pour quelle valeur de  $f$  l'aire est-elle maximale? Quelle est alors la nature du triangle?  
 (c) Déterminer  $x$  tel que l'aire du triangle soit 10.