Chapitre 2 : Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

I Définition

Rappel : Soit $a > 0$. La suite de terme général (a^n) est une suite géométrique de raison a.

Définition
Soit a un nombre réel strictement positif ($a > 0$).
La fonction $x \mapsto a^x$, dite exponentielle de base a est définie pour tout nombre réel positif comme prolongement de la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour les nombres réels x négatifs, cette définition s'étend en posant $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Remarque
La fonction exponentielle de base a est donc toujours définie sur $\mathbb{R}$.
Dans le cas où $a = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$, et c'est la fonction constante égale à 1. Pour la suite, on considèrera $a > 0$ et différent de 1.

II Variations et représentation graphique

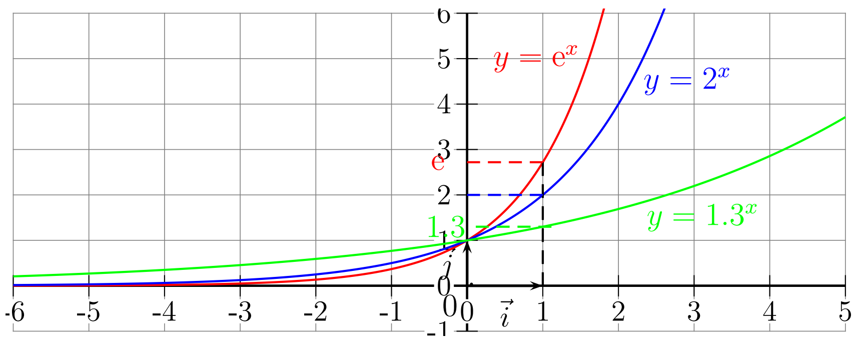
Propriété
Soit $a > 0$.

1. Si $a > 1$, alors la fonction exponentielle de base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $0 < a < 1$, alors la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Remarque
On retrouve le même sens de variation que la suite géométrique (a^n).

II.1 Fonction $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$

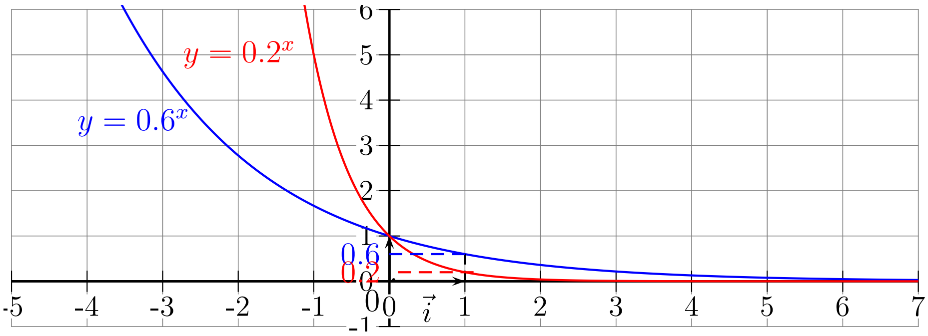
x	$-\infty$	$+\infty$
a^x	0 $\nearrow$	$+\infty$



Fonctions exponentielles de base a, $a > 1$.

II.2 Fonction $x \mapsto a^x$ avec $0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
a^x	$+\infty$ ↘	0



Fonctions exponentielles de base a, $0 < a < 1$.

Remarque
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$. Une exponentielle est toujours strictement positive.

Remarque
Multiplier par une constante strictement positive conserve le sens de variation d'une fonction.
Multiplier par une constante strictement négative change le sens de variation d'une fonction.

Exercice 1
Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes. Justifier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \times 0,87^x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -4 \times 1,7^x$.

Exercice 2
Donner sans justifier le sens de variation de la fonction.

1. $f(x) = 2,4^x$
2. $f(x) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$
3. $f(x) = -2 \times 0,3^x$
4. $f(x) = 12 \times 1,5^x$

III Propriétés algébriques

Les règles de calcul habituelles sur les exposants entiers s'appliquent.

Propriété
Soit $a > 0$. Soient x et y deux nombres réels quelconques.

1. $a^0 = 0$, et $a^1 = a$.
2. Pour tous réels x et y,
$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
3. Pour tout entier relatif n, $a^{n\times x} = (a^x)^n$

Exemples :

1. $2,1^{4,3} \times 2,1^{1,5} = \dots$
2. $0,6^{5,4} \div 0,6^{-3,1} = \dots$
3. $(2,3^{-0,4})^3 = \dots$

IV Application aux taux moyen de n évolutions successives

Définition (taux moyen de n évolutions successives)
Le taux moyen de n évolutions successives est le taux de l'évolution qui, répétée n fois, donne le même taux global.

Rappel : Si une grandeur subit n évolutions de taux t_1, t_2, ..., t_n, alors le taux global t_g est donné par la relation :

$$1 + t_G = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \cdots \times (1 + t_n)$$

On peut retenir que le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs des n évolutions

$$C_G = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$$

Propriété
Le taux moyen t_M de n évolutions successives de taux t_1, t_2, ..., t_n, est donné par la relation

$$(1 + t_M)^n = (1 + t_1)(1 + t_2)\dots(1 + t_n)$$

ou, avec le taux global, $(1 + t_M)^n = 1 + t_G$, soit $\boxed{1 + t_M = (1 + t_G)^{\frac{1}{n}}}$.

Exercice 3
Une grandeur subit une hausse de 13% suivie de deux baisses de 9 %.

1. Calculer le taux global associé aux trois évolutions.
2. En déduire le taux moyen des trois évolutions.