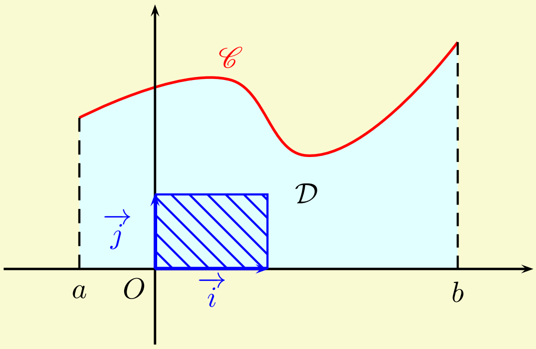
Chapitre 16 : Calcul intégral

I Intégrale d'une fonction positive

I.1 Définition

Définition

1. Dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on appelle unité d'aire l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.
2. Soient f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



On appelle intégrale de f de a à b l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine démilité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette intégrale se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et se lit « intégrale de a à b de f ».

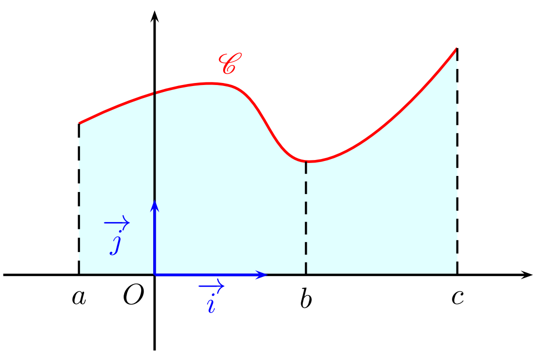
Remarque
La variable x peut être remplacée par n'importe quelle autre variable :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que la variable est muette.

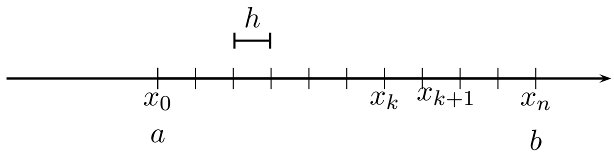
Remarque (Relation de Chasles sur les intégrales)
Soit f une fonction continue et positive sur I.
Pour tous réels a, b et c de I avec $a < b < c$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$



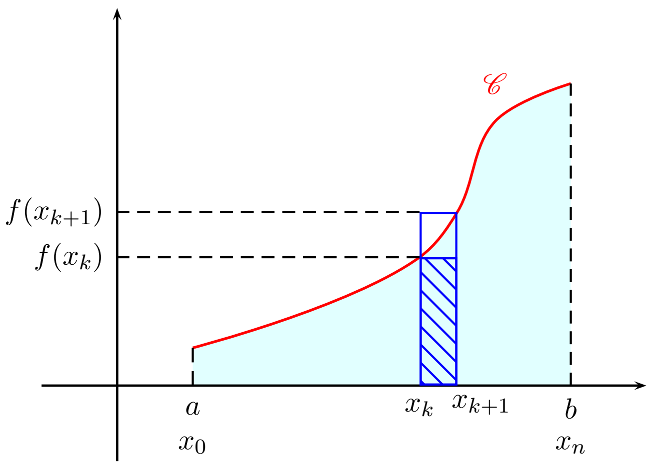
I.2 Méthode des rectangles pour encadrer une intégrale

On suppose que la fonction f est continue, positive, et monotone sur l'intervalle $[a;b]$. Pour approcher l'intégrale de a à b de f, on partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$.
On pose $x_0 = a$, et pour $0 \leqslant k \leqslant n$ $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n} = x_0 + k \times h$.



Sur chacun de ces intervalles $[x_k; x_{k+1}]$, on peut encadrer l'aire sous la courbe de f par des aires de rectangles.
Dans le cas où f est croissante sur $[x_k; x_{k+1}]$, on a

$$h \times f(x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_{k+1})$$



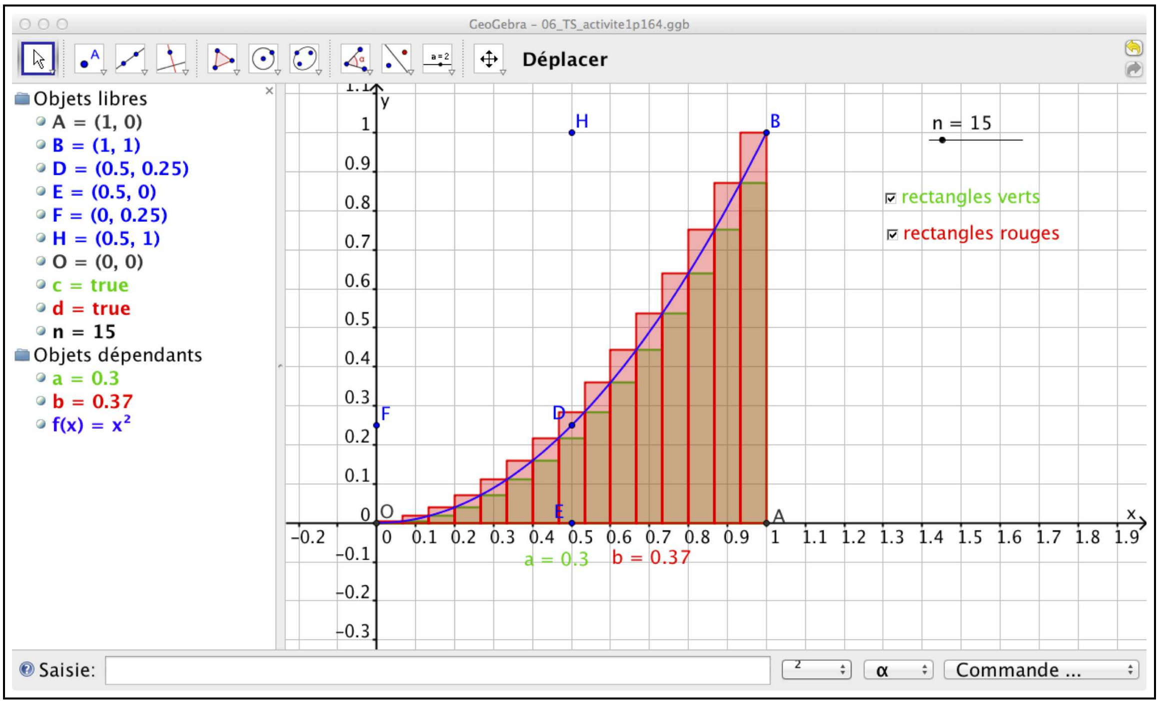
D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}x$.
L'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$ est alors comprise entre la somme des aires des rectangles « sous » la courbe et la somme des aires des rectangles « au-dessus » de la courbe.

Toujours dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a;b]$, on obtient l'encadrement

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$$

soit

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$



Algorithme associé à la méthode des rectanges :

DÉBUT
Entrer f, a, b, n.
h prend la valeur $\dfrac{b-a}{n}$
x prend la valeur a
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à $n-1$
    U prend la valeur $U + h \times f(x)$
    x prend la valeur $x + h$
    V prend la valeur $V + h \times f(x)$
Fin pour
Afficher U, V
FIN

Remarque

1. Dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a;b]$, on a
$$U \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant V.$$
Si f est décroissante sur $[a;b]$, l'algorithme reste valable et on a cette fois
$$V \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant U.$$
2. La méthode des rectangle et l'algorithme restent valables dans le cas où f est seulement continue et monotone sur $[a;b]$ (f de signe quelconque, voir paragraphe IV).

Programmation de l'algorithme à la calculatrice

Texas	Casio
La fonction f étant entrée dans Y_1.	La fonction f étant entrée dans Y_1.

Texas

La fonction f étant entrée dans Y_1.

```
Prompt A,B,N
(B − A)/N → H
A → X
0 → U
0 → V
For(K,0,N − 1)
U + H ∗ Y1(X) → U
X + H → X
V + H ∗ Y1(X) → V
End
Disp U,V
```

Attention : Y_1 s'obtient par $\boxed{\text{var}}$, VAR-Y, Fonction, Y_1.

Exemple : $f(x) = x^2$, $I = [0; 1]$.
Avec $n = 10$, on a $U = 0,285$ et $V = 0,385$.
Avec $n = 100$, $U = 0,32835$ et $V = 0,33835$.

Casio

La fonction f étant entrée dans Y_1.

```
? → A
? → B
? → N
(B − A)/N → H
A → X
0 → U
0 → V
For 0 → K To N − 1
U + H ∗ Y1(X) → U
X + H → X
V + H ∗ Y1(X) → V
Next
U ◢
V ◢
```

II Primitives d'une fonction continue

Théorème (fondamental)
Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f.
On a donc pour tout $x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration (cas où f est croissante)
On se limite au cas où f est croissante pour la démonstration.
On suppose que f est continue, positive, et croissante sur $[a; b]$.
Soit $x_0 \in [a; b]$, et h un réel tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

— 1^er^ cas : si $h > 0$.

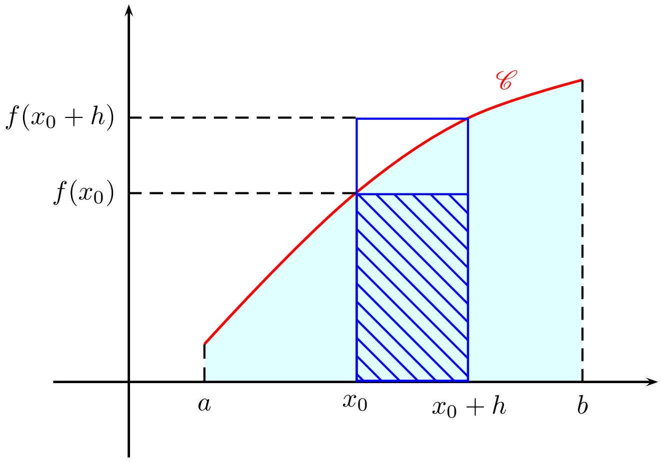
D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$,

c'est-à-dire $F(x_0 + h) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme f est croissante sur $[a, b]$, on peut encadrer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$h \times f(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_0 + h)$$

On a encadré l'aire sous la courbe par les aires des rectangles de largeur $x_0 + h - x_0 = h$ et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$.



Comme $h > 0$, on a donc

$$h \times f(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_0+h)$$
$$h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$
$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

D'après le théorème des gendarmes, si $h > 0$, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

— $2^{\text{ème}}$ cas : si $h < 0$.
On établit de même l'encadrement

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Il vient toujours d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

On a donc montré que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.
Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
On a montré ce résultat pour un réel x_0 quelconque de l'intervalle $[a;b]$, donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$. □

Remarque

On admet le théorème dans le cas général.

Définition
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est f.
Ainsi, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration

Pour la démonstration, on se limite au cas où $I = [a;b]$ et où f admet un minimum m sur I.
La fonction g définie par $g(x) = f(x) - m$ est continue et positive sur $[a;b]$.
D'après le théorème fondamental, elle admet pour primitive la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$.
Alors, la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
En effet, F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$.
Donc f admet des primitives sur $[a;b]$. □

Remarque
On admet le théorème dans le cas général.

Remarque
La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, mais on n'en connaît pas de formule explicite.

Propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, où k est une constante.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration

1. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est également une primitive de f car c'est bien une fonction dérivable sur I (par somme de fonctions dérivables), etpour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.
   Réciproquement, soit G une autre primitive de f.
   Alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.
   Donc la fonction $(G - F)$ est constante sur l'intervalle I, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.
2. Soit $G(x) = F(x) + k$ une primitive de f sur I.
   Pour que $G(x_0) = y_0$, il faut et il suffit que $F(x_0) + k = y_0$, ce qui détermine une unique valeur pour la constante k ($k = y_0 - F(x_0)$).
   Donc il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$. □

III Recherche de primitives

III.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$, $(a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n entier différent de 0 et -1	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$, $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$, $a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

III.2 Opérations sur les primitives

Propriété
Soient f et g deux fonctions continues sur I, de primitives respectives F et G.

1. Une primitive de $f+g$ est $F+G$.
2. Pour toute constante $k \in \mathbb{R}$, une primitive de kf est kF.

Démonstration

1. $(F+G)' = F' + G' = f + g$.
2. $(kF)' = kF' = kf$.

$\square$

Remarque
Attention, $F \times G$ n'est pas en général une primitive de $f \times g$ car $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$.

Propriété (composée)
Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.
2. Une primitive de $u' \times u^n$ avec $n \geqslant 1$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.
3. Pour $n < -1$ et avec u ne s'annulant pas sur I, une primitive de $u' \times u^n$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.
4. Si $u(x) > 0$ sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln u$.
5. Si $u(x) > 0$ sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Démonstration

1. $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
2. $\left(\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' = \dfrac{1}{n+1} \times (n+1)u^n u' = u'u^n$.
3. Idem.
4. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
5. $(2\sqrt{u})' = 2 \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

$\square$

IV Intégrale d'une fonction continue

Propriété
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Si F est une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration
On sait que la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
De plus, si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors il existe une constante k telle que $F(x) = G(x) + k$.
On en déduit que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.
Or, $G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et $G(a) = 0$, donc $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. □

Remarque
Cette formule s'étend aux fonctions continues de signes quelconques sur un intervalle I, avec a et b quelconques dans I, et l'on peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

Définition
Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, et a et b deux réels quelconques de I.
On appelle intégrale de f de a à b la différence $F(b) - F(a)$.
On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette intégrale.

Remarque
On peut donc calculer la valeur exacte d'une intégrale dès que l'on connaît une primitive de la fonction.

Propriété
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I, et k un réel quelconque.

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Linéarité de l'intégrale :
   (a) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Relation de Chasles :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$
5. Positivité de l'intégrale :
   Si $a < b$ et pour tout $x \in [a;b]$ $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
6. Croissance de l'intégrale.
   Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration
Soient F une primitive de f et G une primitive de g.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
3. Linéarité de l'intégrale :
   (a) La fonction kF est une primitive de kf, donc

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x &= (kF)(a) - (kF)(b)\\ &= k(F(b) - F(a))\\ &= k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   (b) La fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$, donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= (F + G)(b) - (F + G)(a)\\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

4. Relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

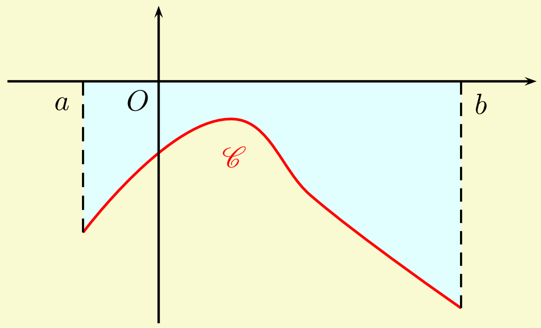
5. Ce résultat se déduit directement de la définition de l'intégrale dans le cas où f est positive.
6. Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a; b]$, alors $(f - g) \geqslant 0$, et donc, avec le point précédent, $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
   Par linéarité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

V Applications du calcul intégral

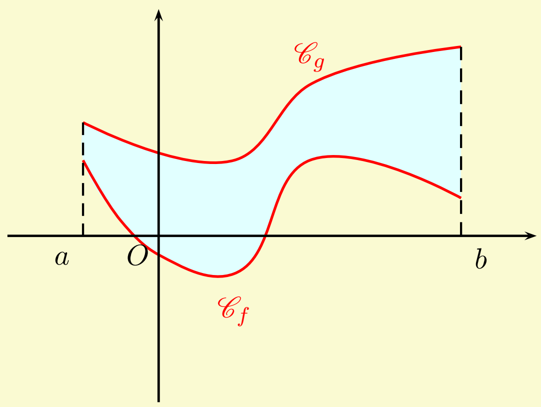
V.1 Calculs d'aires

Propriété

1. Si f est une fonction continue et négative sur $[a;b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



2. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ et telles que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
   Alors l'aire de la surface comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.



V.2 Valeur moyenne

Définition
Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel m tel que $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque
Cette égalité s'écrit aussi $m(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Ainsi, pour une fonction positive, m est la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ qui a la même aire que l'aire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple : Calculons la valeur moyenne de la fonction carré sur $[0;2]$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 t^2 \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - 0\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$ est égale à l'aire du rectangle de hauteur $\frac{4}{3}$ et de largeur 2.