BTS – Logarithme népérien

I Définition et premières propriétés

Définition
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction réciproque de la fonction exp. Ainsi :

1. ln est définie sur $]0;+\infty[$.
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
3. pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
4. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$

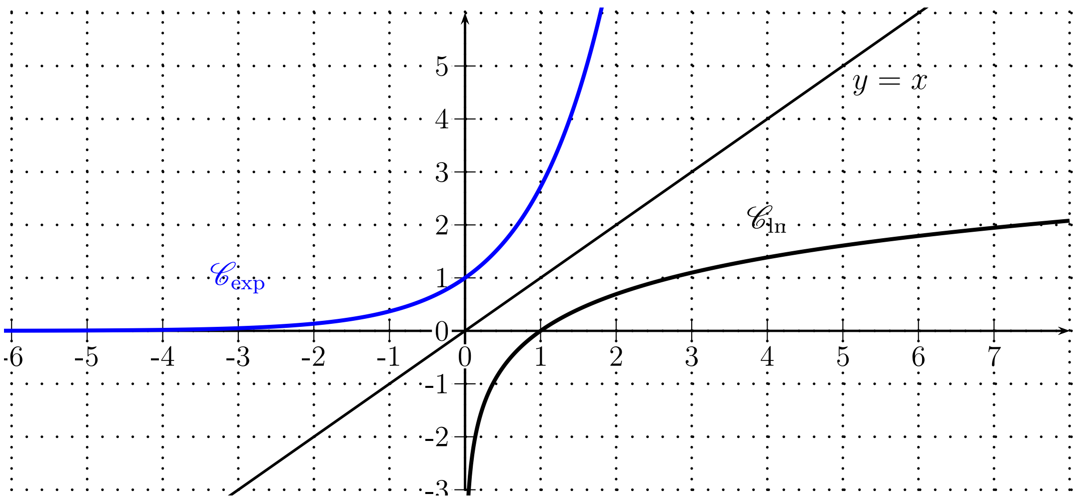
Exercice 1
Calculer.
$A = 2 + 3\ln(\mathrm{e}) - \ln 1$ $\quad B = 8 - \ln(1) - (2\ln(\mathrm{e}))^2$ $\quad C = 3 \times \ln(\mathrm{e}^5) + \mathrm{e}^{\ln(2)}$

Propriété
Pour tout $a > 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(a)$

Exercice 2
Résoudre les équations suivantes :
1. $\mathrm{e}^x = 11$ $\quad$ 2. pour $x > 0$, $\ln(x) = -4$.

II Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété
1. La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.



Remarque
Les courbes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 3
Calculer la dérivée des fonctions.
1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x$.
2. g est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

III Propriétés algébriques

Propriété
Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$,
4. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.
5. $\ln(a^n) = n\ \ln(a)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Exercice 4
Écrire sous forme d'un seul logarithme :
$A = \ln(4) + \ln(5)$, $B = \ln(2) - \ln(3)$, $C = 2\ln(7) + \ln(0.3x)$, et $D = \ln(3) + 5$

Exercice 5
Exprimer en fonction de $\ln 3$.
$A = \ln\dfrac{1}{9}$ $\qquad B = \ln 63 - \ln 7$ $\qquad C = 4\ln 6 - \ln 16$ $\qquad D = \ln(\sqrt{27})$

Propriété (Équations et inéquations avec ln)
Pour tous réels a et b strictement positifs,

1. $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
2. $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.

Exercice 6
Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $e^{-x} = 10$ $\qquad e^{x+5} = 3$ $\qquad 2e^x - 3 = 7$ $\qquad e^{4+5x} \leqslant 7$
2. Résoudre dans $]0; +\infty[$
   $\ln(x) = 3$ $\qquad 4\ln(x) - 7 = 3$ $\qquad 7\ln(x) + 3 < 4$ $\qquad 6 - \ln(x) \leqslant 8$
3. Déterminer l'ensemble de définition de l'équation (ou inéquation) puis la résoudre.
   $\ln(2x+1) = 1$ $\qquad \ln(-x+3) \leqslant 0$ $\qquad \ln(4-x) - 3 \leqslant 0$

IV Logarithme d'une fonction

Théorème (Dérivée de $\ln u$)
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Exercice 7
On pose $f(x) = \ln(2x+1)$.

1. Résoudre $2x + 1 > 0$. L'ensemble solution est l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$.