Chapitre 5 : Généralités sur les suites. Notion de limite

I Généralités

Définition
Une suite numérique (on dit aussi une suite réelle) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Notation : $(u_n)\ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$.
Le nombre réel u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n).

Remarque (importante)
Il y a notamment deux façons de définir une suite réelle :

Par son terme général : il y a une formule qui donne u_n en fonction de n : $u_n = f(n)$.
Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
Alors, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$ etc.

Par récurrence : il y a une formule qui permet de passer d'un terme de la suite au terme suivant. Autrement dit, on a relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Il suffit de donner alors la valeur du premier terme pour que la suite soit entièrement définie.
Exemple : On donne $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = u_n - 2$.
Alors, $u_1 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$, $u_2 = 1 - 2 = -1$, $u_3 = -3$, $u_4 = -5$ etc.

Dans tous les cas, la suite peut être définie seulement à partir d'un certain rang n_0.
Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n - \pi}$ est définie pour $n \geqslant 4$.

I.1 Calcul de termes à la calculatrice

Pour une suite définie par son terme général, on peut utiliser le mode fonction et la table ajustée sur des entiers.
Le mode suite est surtout intéressant pour les suites définies par récurrence.

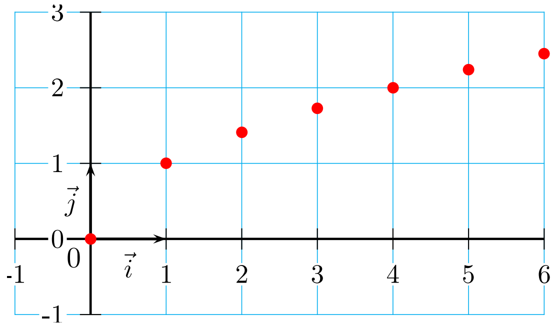
Calculatrice TI.
On passe en `mode`, `suite`.
Pour définir la suite, on va dans $\boxed{f(x)}$.
$nMin$ est l'indice du premier terme : 0 si le premier terme est u_0.
$u(n)$: expression qui peut dépendre de n, et/ou du terme précédent $u(n-1)$.
$u(nMin)$ est le premier terme (on ne met rien pour une suite définie par son terme général).
On affiche le tableau de valeurs dans `table` (éventuellement à paramétrer via `deftable`)
Calculatrice Casio.

II Comportement global d'une suite

II.1 Suite croissante, suite décroissante

Définition
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :
— la suite (u_n) est croissante lorsque pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$,
— (u_n) est décroissante lorsque pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$,
— (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est croissante.



Techniques d'étude
— Si l'on connaît le terme général de la suite : $u_n = f(n)$, alors (u_n) a le même sens de variation que f sur $[0; +\infty[$,
— On peut former la différence $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à (u_n) croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ équivaut à (u_n) décroissante.
— Dans le cas des suites à termes strictement positifs, on peut former le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1 (utile lorsqu'il y a des puissances).
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors (u_n) est croissante.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 1
Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^3 - 9n^2$
2. (U_n) est définie par $U_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = U_n - n^2$
3. $v_n = \dfrac{1}{3^n}$ (définie pour tout $n \geqslant 0$).

Remarque
Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes (même à partir d'un certain rang).
Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.
En effet, si n est pair $u_n = 1$, et si n est impair $u_n = -1$.
Il n'existe donc aucun rang N_0 pour lequel on ait $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \geqslant N_0$.
De même, il n'existe aucun rang N_0 pour lequel on ait $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant N_0$.

II.2 Suite majorée, suite minorée

Définition
On dit qu'une suite (u_n) est majorée s'il existe un nombre M tel que pour tout entier n on ait $u_n \leqslant M$ (le nombre M est un majorant de la suite).
On dit qu'une suite (u_n) est minorée s'il existe un nombre m tel que pour tout entier n on ait $u_n \geqslant m$ (m est un minorant de la suite).
Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Remarque
Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 2
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{4n-1}{n+3}$ est croissante et majorée par 4.
En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III Algorithmes de calcul de terme et de somme de termes

III.1 Algorithme de calcul de terme d'une suite récurrente

Exercice 3
Écrire un algorithme qui renvoie le nombre u_n lorsque l'on entre l'entier n.

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases}$$

Programme Termsuit
```
Entrer N
5 → U
Pour K allant de 1 à N
     2U+6 → U
FinPour
Afficher U
```

Programme CASIO
```
"N=" ?→ N
5 → U
For 1 → K to N
2U+6 → U
Next
U ◢
```

Programme TEXAS
```
Prompt N
5 → U
For (K,1,N)
2U+6 → U
End
Disp U
```

On obtient par exemple $u_{10} = 11258$.

III.2 Algorithme de calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite

Exercice 4
On reprend la suite précédente : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases}$

On cherche cette fois à obtenir $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour un entier n donné en entrée ($n \geqslant 1$).

Programme Somsuite
```
Entrer N
5 → U
U → S
Pour K allant de 1 à N
     2U+6 → U
```

```
    S+U → S
FinPour
Afficher S
```
On obtient $S_{10} = 22451$.

Exercice 5 (variantes)
Écrire un algorithme qui renvoie la somme S_n des premiers termes jusqu'à u_n.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2 + 5n$.

   Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   ```
   Entrer N
   2 → S (car u0 = 2, et donc S0 = 2).
   Pour K allant de 1 à N
       2+5k → U
       S+U → S
   FinPour
   Afficher S
   ```

2. $\begin{cases} u_3 = -1 \\ \text{Pour tout } n \geqslant 3, u_{n+1} = -2u_n + 6 \end{cases}$

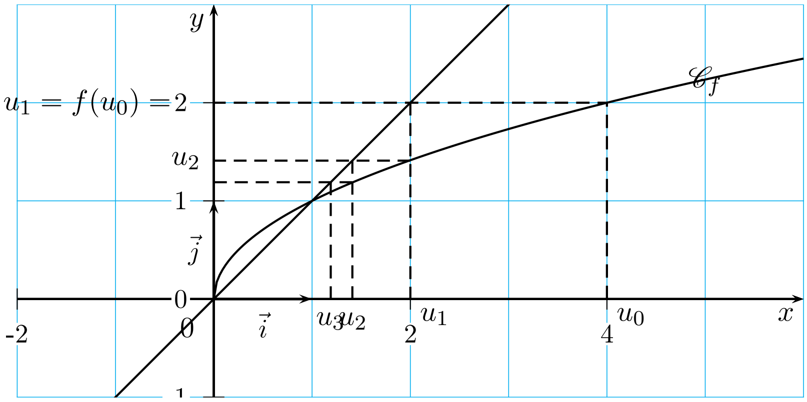
   On cherche à obtenir $S_n = u_3 + u_4 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k$ pour un entier n donné en entrée ($n \geqslant 4$).

IV Représentation des suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Cadre : on s'intéresse aux suites (u_n) définies par récurrence : $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

IV.0.a Premier exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$
Donc, $f(x) = \sqrt{x}$. On représente la fonction f et on trace la droite d'équation $y = x$. On place les termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
La droite d'équation $y = x$ permet de reporter une même valeur de l'axe des ordonnées vers l'axe des abscisses.

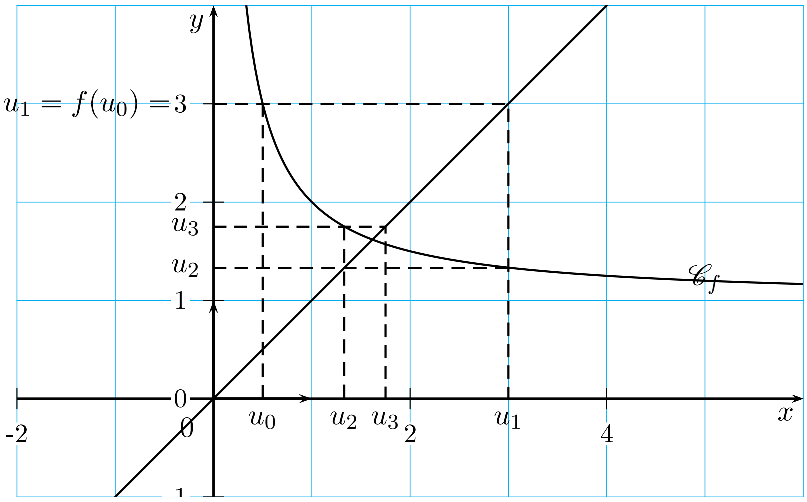


On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante, bornée ($1 \leqslant u_n \leqslant 4$), et qu'elle converge vers 1.

IV.0.b Deuxième exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Ici, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.



On peut conjecturer que la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

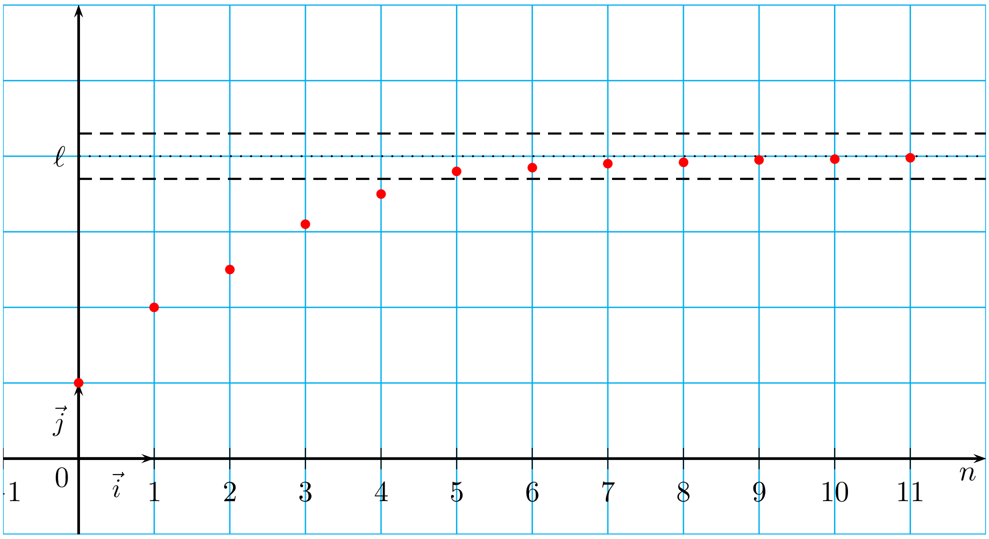
On retiendra deux allures classiques :
- la forme en escalier lorsque f est croissante sur $[0; +\infty[$,
- la forme en spirale lorsque f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

V Notion de limite. Recherche de seuil

V.1 Suite convergeant vers un nombre réel ℓ

Définition
Soient (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit il) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = \ell$.

Illustration :
Le graphique ci-dessous représente une suite (u_n) qui converge vers $\ell = 4$.
L'intervalle ouvert contenant 4 est ici $]3,7;4,3[$.



Remarque
Il est inutile de préciser $n \to +\infty$ car c'est toujours le cas dans ce chapitre.
On note simplement $\lim u_n = \ell$ pour désigner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Théorème
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Remarque
Il existe des suites qui ne sont pas convergentes (on dit alors divergentes).
Exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.
Les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ n'ont pas de limite. Elles sont divergentes.

Exemple :
$\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ où k est un entier supérieur où égal à 1 sont des suites convergeant vers 0.

V.2 Suites ayant une limite infinie

Définition
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si tout intervalle du type $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = +\infty$.
On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si tout intervalle du type $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = -\infty$.

Exemple :
Avec la suite de terme général $u_n = n^2$, $\lim u_n = +\infty$.
$\lim \sqrt{n} = +\infty$.

Recherche de seuil lorsque l'on conjecture que la suite diverge vers $+\infty$:
Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.
Il est clair que (u_n) est croissante (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$).
On cherche le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $n^2 \geqslant 10^7$.

— Méthode 1 : on résout l'inéquation $n^2 \geqslant 10^7$
Comme n est un entier positif, cela implique $n \geqslant \sqrt{10^7} \approx 3162,3$.
Le plus petit entier qui convient est donc $N = 3163$.
Parfois, on sera confronté à des inéquations qu'on ne sait pas résoudre, et il faudra se tourner vers la méthode 2.

— Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme.

```
DÉBUT
  n prend la valeur 0
  U prend la valeur n²
  Tant que U < 10⁷,
    n prend la valeur n + 1
    U prend la valeur n²
  Fin Tant que
  Afficher n
FIN
```

Exercice 6
Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \times \sqrt{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. On admet que $\lim u_n = +\infty$.
   Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^4$ (voir livre page 115).
3. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0 [1].

1. On doit trouver $n_0 = 465$