1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°7 pour le lundi 18 mai 2020

Exercice 1 (sujet B page 187)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Calculons $f'(x)$.
   On rappelle que, pour tous réels a et b, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$.
   Et la dérivée d'un produit de deux fonctions est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$.
   Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + (4x+1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}[4-(4x+1)] = (-4x+3)\mathrm{e}^{-x}$.
   Réponse b.
2. Résolvons l'inéquation $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3+0,1x} > 0$.
   Cela revient à $\mathrm{e}^1 > \mathrm{e}^{-3+0,1x}$ ssi $1 > -3 + 0,1x$ ssi $0,1x < 4$ ssi $x < 40$.
   L'ensemble solution est $]-\infty; 40[$.
   Réponse b.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} - 3\mathrm{e}^x$ a le même signe que ...
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} - 3\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^3 - 3)$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} - 3\mathrm{e}^x$ a le même signe que $\mathrm{e}^3 - 3$ (positif).
   Réponse a.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x+3} \times \mathrm{e}^x$ est égal à ....
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x+3} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x+3+x} = \mathrm{e}^{3x+3} = \mathrm{e}^{3(x+1)} = (\mathrm{e}^{x+1})^3$.
   Réponse a.

Exercice 2 (sujet C page 187)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x$.

1. Dérivée.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1)$.
2. Signe de $f'(x)$.
   Comme $2 > 0$, $f'(x) = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1)$ a le même signe que $\mathrm{e}^{2x} - 1$.
   $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$ ssi $\mathrm{e}^{2x} > \mathrm{e}^0$ ssi $2x > 0$ ssi $x > 0$.
   $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$. Donc $f'(x) > 0$ ssi $x > 0$, et $f'(x) < 0$ ssi $x < 0$.
3. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$.

4. (a) Montrer que f admet un minimum, préciser en quelle valeur il est atteint.
   D'après le tableau de variation de f, f admet un minimum en 0, ce minimum est 1.
   (b) Signe de f.
   Comme le minimum de f est 1>0, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$.
5. Soit T la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
   (a) Équation de T.
   $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(\mathrm{e}^2 - 1)(x-1) + \mathrm{e}^2 - 2$
   $y = 2(\mathrm{e}^2 - 1)x + \mathrm{e}^2 - 2 - 2\mathrm{e}^2 + 2 = 2(\mathrm{e}^2 - 1)x - \mathrm{e}^2$.
   T a pour équation $y = 2(\mathrm{e} - 1)x - \mathrm{e}^2$.
   (b) Montrons que T passe par le point $A(0; -\mathrm{e}^2)$.
   En remplaçant x par 0 dans l'équation de T, on a $y = 0 - \mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2$.
   Donc T passe par le point $A(0; -\mathrm{e}^2)$.

Exercice 3 (n° 88 page 206)

1. Images des réels $\dfrac{201\pi}{6}$, $\dfrac{71\pi}{3}$, et $-\dfrac{45\pi}{4}$.

   (a) $\dfrac{201\pi}{6}$.

   $2\pi = \dfrac{12\pi}{6}$.

   On cherche le multiple de 12 le plus proche multiple de 201, c'est $204 = 12 \times 17$.

   Donc $\dfrac{201\pi}{6} = \dfrac{204\pi}{6} - \dfrac{3\pi}{6} = 17 \times 2\pi - \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\dfrac{201\pi}{6}$ a la même image que $-\dfrac{\pi}{2}$.

   (b) $\dfrac{71\pi}{3}$.

   $2\pi = \dfrac{6\pi}{3}$.

   On cherche le multiple de 6 le plus proche multiple de 71, c'est $72 = 12 \times 6$.

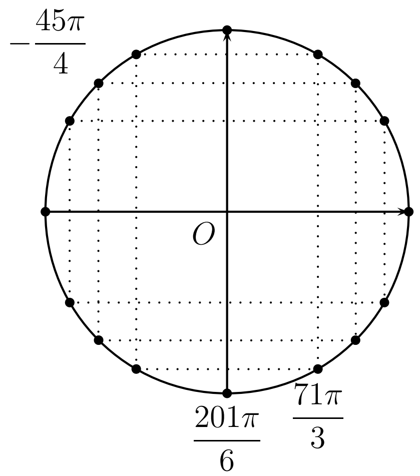
   Donc $\dfrac{71\pi}{3} = \dfrac{72\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 12 \times 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$. Donc $\dfrac{71\pi}{3}$ a la même image que $-\dfrac{\pi}{3}$.

   (c) $-\dfrac{45\pi}{4}$

   $2\pi = \dfrac{8\pi}{4}$.

   On cherche le multiple de 8 le plus proche multiple de -45, c'est $-48 = -6 \times 8$.

   Donc $-\dfrac{45\pi}{4} = -\dfrac{48\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = -6 \times 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$. Donc $-\dfrac{45\pi}{4}$ a la même image que $\dfrac{3\pi}{4}$.



2. En déduire leur cosinus et leur sinus.

   $\cos\dfrac{201\pi}{6} = \cos -\dfrac{\pi}{2} = 0$, et $\sin\dfrac{201\pi}{6} = \sin -\dfrac{\pi}{2} = -1$.

   $\cos\dfrac{71\pi}{3} = \cos(-\dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, et $\sin\dfrac{71\pi}{3} = \sin\dfrac{-\pi}{3} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   $\cos -\dfrac{45\pi}{4} = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\sin -\dfrac{45\pi}{4} = \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 (n° 7 page 207)

Soit $x \in [-\pi; 0]$, et tel que $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$.

Donc $\sin x = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$ ou $\sin x = -\sqrt{\dfrac{9}{25}} = -\dfrac{3}{5}$.

Or, on sait que $x \in [-\pi; 0]$, donc $\sin x \leqslant 0$.

Finalement, $\sin x = -\dfrac{3}{5}$.