BTS CRSA1 – Produit scalaire - Produit vectoriel

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ de l'espace.

I Produit scalaire

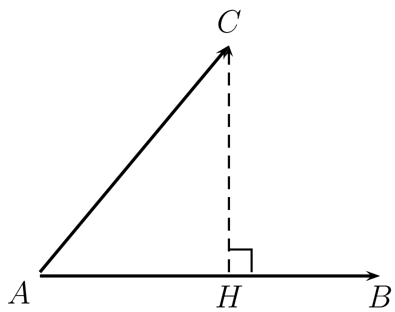
On rappelle que deux vecteurs (ou 3 points) de l'espace sont toujours coplanaires : il suffit de considérer des représentants ayant la même origine.

Définition
Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace est le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ calculé dans un plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Le résultat est indépendant des représentants choisis.

Remarque
Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Propriété (expressions du produit scalaire)
A, B et C sont trois distincts, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

1. Formule du cosinus.
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
2. Formule du projeté orthogonal.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$
3. Expression en repère orthonormé.
Soient $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs.
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

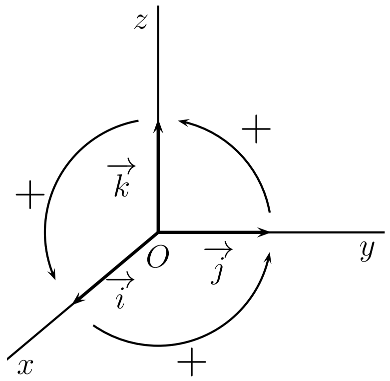


Propriété
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs quelconques, et k un nombre réel.

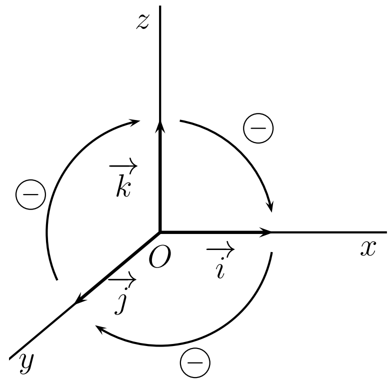
1. Symétrie : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
2. Linéarité :
   - $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.
   - $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$
4. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

II Produit vectoriel

Un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$ de l'espace peut être orienté de deux façons : directe ou indirecte.



Sens direct :
$p - i - m$ main droite

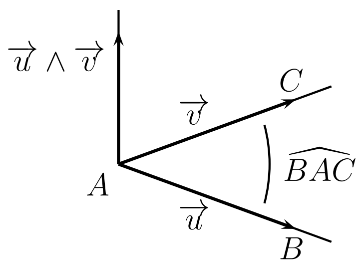


Sens indirect :
$p - i - m$ main gauche

Pour la suite, on suppose que $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$ est un repère orthonormé direct.

Définition
Le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini par :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- Sinon :
  - sa direction est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$ (c-à-d au plan (ABC))
  - son sens est tel que $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit direct
  - sa norme est donnée par $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$



Remarque
Le produit vectoriel est un vecteur. Le produit scalaire est un nombre.

Propriété (coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$)
Si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\ (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$$

Propriété
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.
L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||$.

Remarque (commandes Geogebra)

1. Pour le produit scalaire, on écrit `ProduitScalaire(u,v)`
2. Pour le produit vectoriel, on écrit `ProduitVectoriel(u,v)`