BTS - Équations différentielles linéaires du 1$^{\text{er}}$ ordre

I Introduction

De nombreux phénomènes scientifiques peuvent être modélisés par une relation entre une fonction f et sa dérivée f'.
Rechercher cette fonction f revient à résoudre une équation différentielle.
Exemples :

— On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. Le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t (en secondes) vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$ la relation : $N'(t) = 0,2N(t)$.

— Le carbone 14, noté ^{14}C, est un isotope radioactif qui sert à la datation en archéologie et en géologie. La méthode repose sur le fait que tout au long de leur vie, les organismes vivants assimilent du ^{14}C et, quand ils meurent, le ^{14}C qu'ils ont accumulé commencent à se désintégrer : le nombre d'atomes décroît alors avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On admet que l'évolution du ^{14}C dans un échantillon de matière organique est modélisée par une fonction N dérivable sur $[0; +\infty[$ et qui vérifie : $N'(t) + 0,121N(t) = 0$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes de ^{14}C existant à l'instant t, exprimé en milliers d'années.

Bref historique
C'est au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles.
Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du XVIII$^{\text{e}}$ siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernoulli notamment) furent découvertes.
Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace . . .).

II Généralités

Définition

— Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue (souvent notée y) est une fonction, et qui donne une relation entre y, sa dérivée y' (éventuellement y'', des dérivées successives), et la variable x sur un intervalle donné.

— Une fonction qui vérifie l'équation différentielle est une solution de cette équation.

— Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les solutions de l'équation.

— Une fonction donnée qui est solution est appelée une solution particulière.

Exercice 1
Soit l'équation différentielle suivante, d'inconnue y : $y'(x) = 4x + 1$.
Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^2 + x + 3$ est une solution de cette équation différentielle.

Exemple :

1. $2y - xy' = 0$ est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, à coefficients non constants.
2. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ est une équation différentielle non linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants. La notation $\dfrac{dy}{dx}$ est souvent utilisée en physique.
3. $y'' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du 2^{d} ordre à coefficients constants.

Exercice 2
Reconnaître parmi ces 3 fonctions celles qui sont solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 4$.
$F(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 4$; $G(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} + 2$; $H(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2$.

Exercice 3
Idem avec $y' + y = 4x$.
$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 4x + 4$; $g(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 4x - 4$; $h(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 4x - 4$

Exercice 4
Trouver une solution des équations différentielles suivantes.

1. $y' = 0$
2. $y' = y$
3. $y' + y = 7x + 7$

Exercice 5
Montrer que la fonction g définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

III Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition (équation différentielle linéaire du 1er ordre)
Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple : L'équation $y' + xy = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire du permier ordre.

Remarque
Lorsque l'on a une équation de la forme $A(x)y' + B(x)y = C(x)$, on se ramène à la forme $y' + a(x)y = b(x)$, (dite résolue), en divisant par $A(x)$ (se placer sur un intervalle où $A(x)$ ne s'annule pas).

III.1 Équation homogène $y' + a(x)y = 0$

Définition (équation homogène)
L'équation homogène associée à l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ est l'équation $y' + a(x)y = 0$

Théorème (solutions de l'équation homogène)
Soit A une primitive de a sur I.
Les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque
Il y a donc une infinité de solutions pour l'équation homogène.

Exercice 6
Résoudre les équations différentielles

1. $y' = -4y$
2. $2y' - y = 0$
3. $y' + xy = 0$

Propriété (unicité sous condition initiale)
Si l'on impose une condition initiale $f(x_0) = y_0$, alors la valeur de k est fixée et l'équation n'a qu'une seule solution.

Exercice 7
Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $y(0) = -1$.

III.2 Équation complète (avec second membre) $y' + a(x)y = b(x)$

Théorème (Équation $y' + a(x)y = b(x)$)
Soit y_p une solution particulière de l'équation complète $y' + a(x)y = b(x)$.
Les solutions de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière y_p à la solution générale de l'équation homogène associée.
Elles sont donc de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-A(x)} + y_p(x)$ où $k \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.

Remarque
Comme précédemment, l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ admet une infinité de solutions.
Avec en plus une condition initiale $y(x_0)$ donnée ($x_0 \in I$), elle a une unique solution vérifiant la condition initiale.

Exercice 8

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + 5$.
   Pour une solution particulière, on pourra chercher une fonction constante.
2. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + y = -2$ qui vérifie $y(0) = 5$.
   Même indication pour une solution particulière.

Remarque
Conformément au programme de BTS, des indications seront toujours données pour obtenir une solution particulière y_p. Parfois il suffira de vérifier qu'une fonction donnée est bien solution particulière.

Quelques cas particuliers pour obtenir une solution particulière :

— Si $b(x)$ est un polynôme, chercher une solution particulière $y_p(x)$ sous la forme d'un polynôme.

— Si $b(x)$ est de la forme $C\cos(x)$ ou $D\sin(x)$ ou la somme de ces deux expressions, C, D étant des constantes, chercher $y_p(x)$ sous la forme $y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. On est alors amené à résoudre un système d'inconnues A et B.