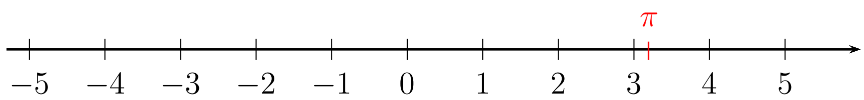
Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions

I Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

I.1 La droite graduée

L'ensemble de tous les nombres réels se note $\mathbb{R}$.
On peut représenter $\mathbb{R}$ par une droite graduée.
À chaque nombre réel correspond un unique point sur la droite, et réciproquement à chaque point de la droite correspond un unique nombre, appelé abscisse de ce point.



($\pi \approx 3.14$)

I.2 Ensemble ayant un nombre fini d'éléments

Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments s'écrit avec des accolades.

Exemple :
$A = \{2; -3; 5\}$.
L'ensemble A est composé des nombres 2, -3 et 5.
$2 \in A$ ($\in$ est le symbole pour "appartient à"). Par contre, $-1 \notin A$.
Posons $B = \{-3; 1; 2; 4; 5\}$.
Tous les éléments de A sont aussi dans B.
On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$.

I.3 Ensembles des nombres entiers

L'ensemble des nombres entiers naturels (positifs ou nuls) se note $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}.$$

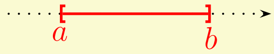
Par exemple, $13 \in \mathbb{N}$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) se note $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}.$$

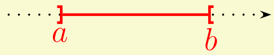
Par exemple, $-39 \in \mathbb{Z}$, mais $6,27 \notin \mathbb{Z}$.
On peut remarquer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

I.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

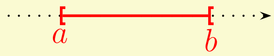
Définition (Intervalles bornés)
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
L'intervalle fermé $[a;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.



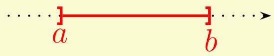
L'intervalle ouvert $]a;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.



L'intervalle $[a;b[$ (fermé en a, ouvert en b) est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.

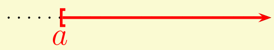


L'intervalle $]a;b]$ (ouvert en a, fermé en b) est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$.

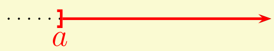


Remarque
Le symbole mathématique pour l'infini est ∞.

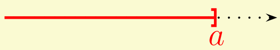
Définition (Intervalles non bornés)
Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'intervalle fermé $[a;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$.



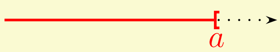
L'intervalle ouvert $]a;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > a$.



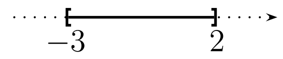
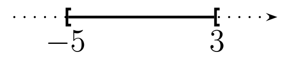
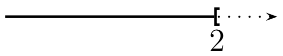
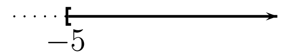
L'intervalle fermé $]-\infty;a]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$.



L'intervalle ouvert $]-\infty;a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.



Exemple :

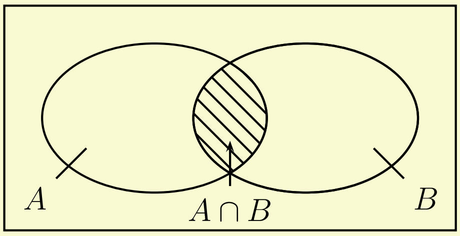
Inégalité	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
$-3 \leqslant x \leqslant 2$	$[-3;2]$	
$-5 \leqslant x < 3$	$[-5;3[$	
$x < 2$	$]-\infty;2[$	
$x \geqslant -5$	$[-5;+\infty[$	

Remarque
On ouvre toujours les crochets pour $+\infty$ et $-\infty$.
$\mathbb{R}$ est un intervalle, il s'écrit $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

I.5 Intersection et réunion

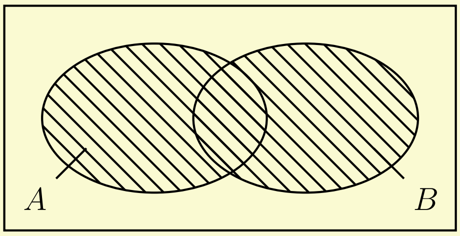
Définition

1. Intersection de deux ensembles.
   L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.
   La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Exercice 1
Traduire à l'aide d'intervalles les conditions suivantes :
a) $x > 1$
b) $x < 2$ et $x \geqslant -5$
c) $x < 0$ ou $x \leqslant 2$
d) $-3 < x \leqslant 1$

Exercice 2
Écrire plus simplement les ensembles suivants :
a) $]-4;5[\ \cap\ [1;10]$.
b) $[-\infty;2[\ \cup\ ]-1;3]$
c) $[1;4]\ \cap\ [6;7]$
d) $]-\infty;-3]\ \cup\ ]-5;+\infty[$
e) $[4;12[\ \cup\ ]-3;15[$

Remarque
Notations particulières :
$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.
$\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$.
$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.
$\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.
$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$.

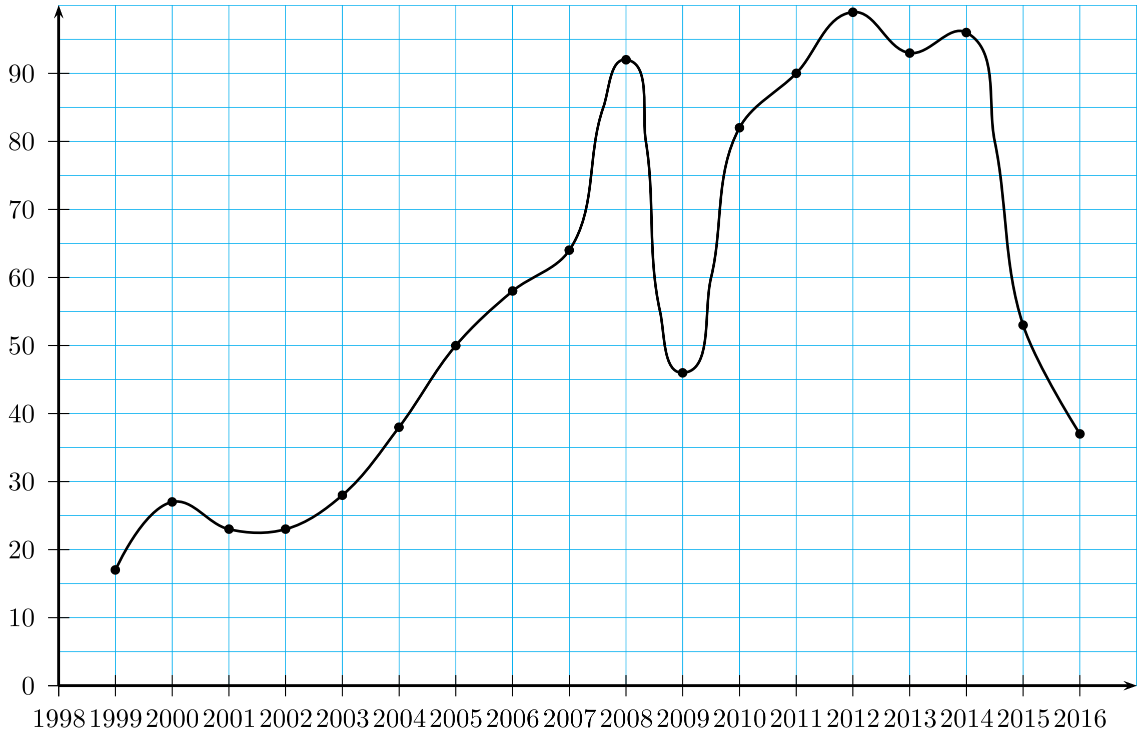
Exercice 3
- Raisonnement et inégalités
  ressource 140
  ressource 3140
- Ou/et, réunion/intersection
  ressource 3154
  ressource 3335
  ressource 3473 (réunion intersection sur des intervalles)

II Notion de fonction

II.1 Introduction

II.1.a Exemple graphique

Le graphique suivant représente l'évolution du prix du baril de pétrole, exprimé en dollars, de début 1999 à début 2016.



1. Combien coûtait approximativement un baril de pétrole au début de l'année 1999 ? Et début 2011 ?

2. D'après le graphique, entre 1999 et 2016, combien de fois le baril de pétrole a-t-il coûté 60 dollars ?

3. D'après le graphique, entre 1999 et 2016, combien de fois le baril de pétrole a-t-il coûté 30 dollars ?

4. Quand le baril de pétrole a-t-il atteint son maximum entre 2002 et 2009 ? Quel était ce maximum ?

5. Comment a évolué le prix du baril de pétrole entre 2002 et 2008 ?

6. Parmi les deux phrases suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?
   « À chaque date entre 1999 et 2016, il correspond un unique prix pour le baril de pétrole ».
   « À chaque valeur entre 18 et 99 dollars pour le prix du baril de pétrole, il correspond une unique date entre 1999 et 2016 ».

Vocabulaire :
Le graphique montre que lorsque l'année (le temps) varie, le prix du baril de pétrole évolue.
Le ______________________________ dépend du ____________________.
On dit que le temps est la ____________________.
Sur le graphique, on lit ses valeurs en ____________________.
Le prix du baril de pétrole est ____________________ du temps.
On lit ses valeurs en ____________________.

II.1.b Un tableau de valeurs

Compléter le tableau suivant :

Si x vaut	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Alors, $-x^2+1$ vaut	-8							

Lorsque la valeur de x varie, ____.
On dit que $-x^2+1$ est ____________________ de x.
Le procédé qui permet de passer d'un nombre x au nombre $-x^2+1$ est une fonction. Si on note f cette fonction, pour un nombre x donné, le nombre $-x^2+1$ s'appelle l'image de x par f, et on note $f(x) = -x^2+1$.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - x^2$.
L'image de 0 par f est ____________________.
L'image de -5 par f est ____________________.

II.2 Définition

Définition
Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre x appartenant à D un unique nombre réel $f(x)$.
Vocabulaire : On dit que

- x est la variable de f,
- D est l'ensemble de définition de f (souvent noté D_f),
- $f(x)$ est l'image de x par f.

On note parfois $f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Exemple :
Posons $f(x) = 2x^2 - 1$.
L'image de 0 par f est $f(0) = 2 \times 0^2 - 1 = -1$.
Pour calculer l'image d'une nombre par une fonction, on remplace x par ce nombre dans l'expression de f.
Déterminer l'image de -3 par f.

Exercice 4
Calculer l'image d'un nombre par une fonction : ressource 1833

Définition
Soit f une fonction définie sur D. Soit y un nombre réel.
On appelle antécédent de y pr f tout nombre x de D tel que $f(x) = y$.

Exemple :
Considérons la fonction carré, $f(x) = x^2$.

- On cherche les antécédents de 9 par f.
  Un antécédent de 9 est un nombre x tel que $f(x) = 9$.
  L'équation $x^2 = 9$ donne $x = 3$ ou $x = -3$.
  Ainsi, le nombre 9 a deux antécédents qui sont 3 et -3.

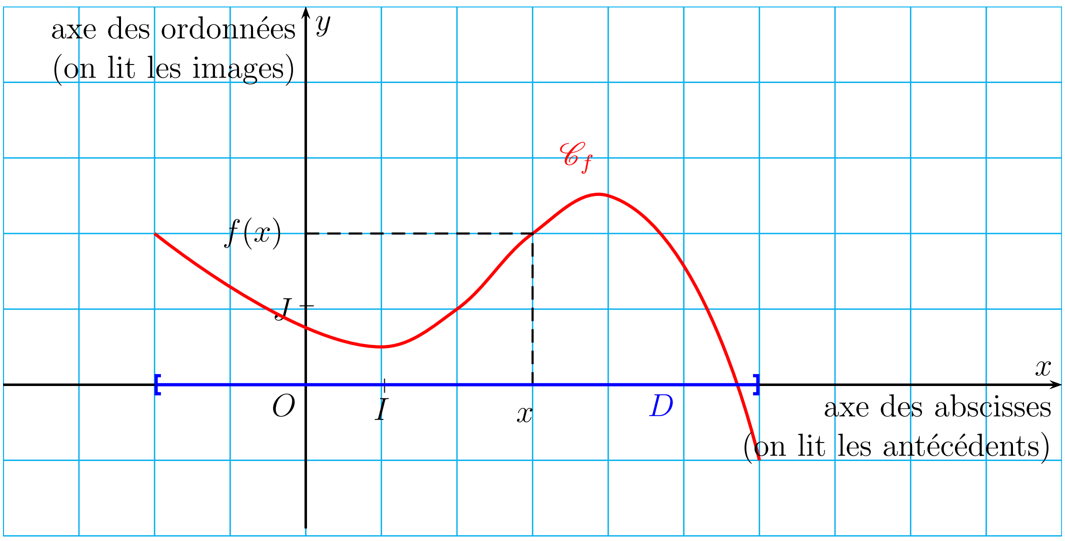
— Rechercher les antécédents de -2 par f.
Ce sont les nombres x tels que $x^2 = -2$.
Cette équation n'a pas de solution (un carré est toujours positif).
Donc -2 n'a pas d'antécédent par f.

Remarque
Un nombre peut avoir 0 antécédent, ou un antécédent, ou plusieurs !
Par contre, tout nombre x de D admet une unique image $f(x)$.

II.3 Représentation graphique d'une fonction

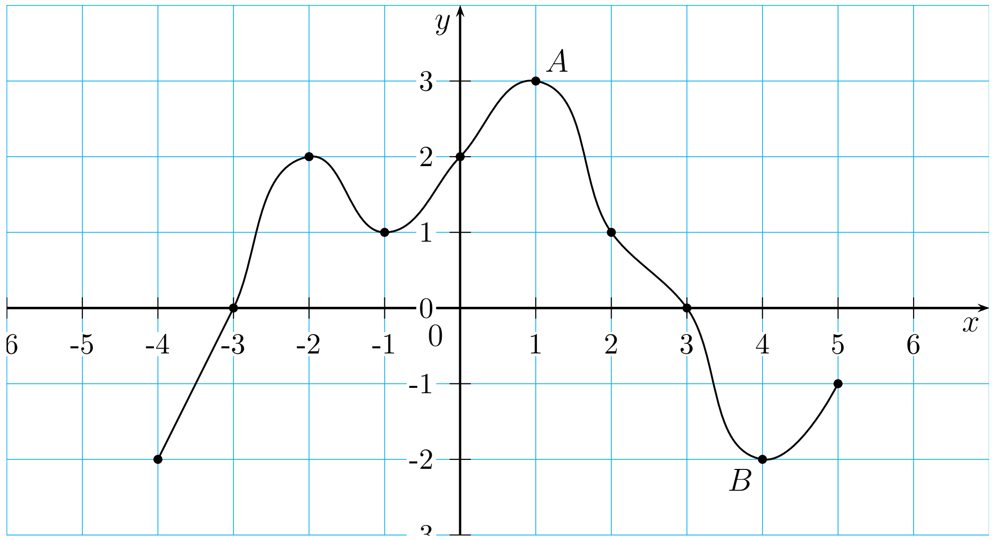
Pour étudier une fonction f, il est intéressant de pouvoir lire à la fois le nombre de départ x et son image $f(x)$.

Définition
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D_f$.
Autrement dit, $M(x; y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\big(x \in D \text{ et } y = f(x)\big)$.
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.



Sur cet exemple, l'ensemble de définition de f est $D = [-2; 6]$.

Exercice 5
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 5]$.



1. On remarque que la courbe passe par le point $A(\ldots;\ldots)$.
   On en déduit que ...
2. De même, la courbe de f passe par le point $B(\ldots;\ldots)$.
   On a donc ....
3. Compléter les images par lecture graphique.
   $f(-4) = \ldots$ $\quad f(0) = \ldots$ $\quad f(2) = \ldots$ $\quad f(3) = \ldots$.
4. Le nombre 5 est-il un antécédent de -1 par f ? Justifier.
   ....
5. Quel est le nombre d'antécédents de -1 par f ?
   ....
6. Compléter (il y a plusieurs bonnes réponses possibles) :
   Le nombre ... a deux antécédents par f.
   Le nombre ... a quatre antécédents par f.
   Le nombre ... n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - x^2$. Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Étudier si les points suivants appartiennent à la courbe de f. $A(2; 6)$ et $B(-1; -4)$.
2. Déterminer les coordonnées du point de la courbe qui a pour abscisse -3.
3. Rechercher les antécédents de 0 par f.

Remarque

Pour une valeur de la variable x donnée, il n'y a qu'une seule image $f(x)$. Par conséquent la courbe d'une fonction ne peut avoir qu'un point d'abscisse donnée.
Illustrations : exemple et contre-exemple.

Remarque

La courbe représentative permet d'avoir une vision plus globale de la fonction et de ses variations.

II.3.a Tableau de valeurs, tracé de courbe

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[1; 5]$ par $f(x) = (x - 3)^2 - 2$.

1. Tableau de valeurs :
   Compléter le tableau.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$									

2. Dans un repère orthogonal, construire la courbe représentative de f sur $[1; 5]$.

Exercice 8 (calcul mental)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 4$.

1. L'image de -1 est ...
2. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots.$
3. 10 admet pour antécédent le réel ...
4. La courbe représentative de f passe par $A(0; \ldots)$, $B(2; \ldots)$ et $C(\ldots; 4)$.

II.4 Utilisation de la calculatrice (TI)

1. Définir une fonction : $\boxed{f(x)}$ ou $\boxed{Y =}$
2. Obtenir la représentation graphique : $\boxed{\text{Graphe}}$
3. Paramétrer la fenêtre d'affichage du graphique : $\boxed{\text{Zoom}}$ (Standard) , ou $\boxed{\text{Window}}$
4. Afficher un tableau de valeurs : $\boxed{\text{Table}}$
5. Paramétrer le tableau de valeurs : $\boxed{\text{Def table}}$ ou $\boxed{\text{Tblset}}$
   — Définir la valeur de début : $\boxed{\text{Debut}}$ ou $\boxed{\text{Tblstart}}$
   — Définir le pas : $\boxed{\text{pas}}$ ou $\boxed{\Delta\text{Tbl}}$

Exercice 9

1. Déterminer graphiquement l'image d'un nombre par une fonction : ressource 138
2. Déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre par une fonction : ressource 137
3. Déterminer graphiquement le nombre d'antécédents de nombres par une fonction : ressource 455

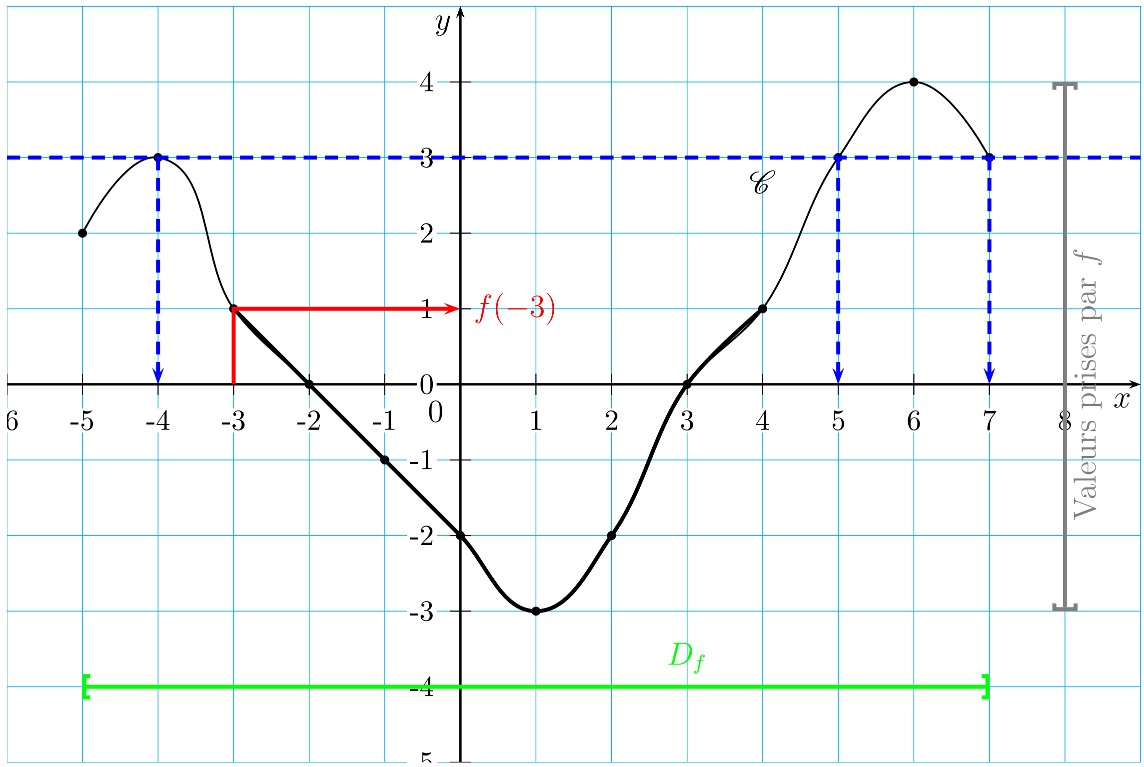
Exercice 10
Déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre par une fonction : ressource 2415

Exercice 11
Déterminer graphiquement le nombre d'antécédents d'un nombre par une fonction suivant les valeurs de ce nombre : ressource 2348

Exercice 12
Déterminer graphiquement le signe d'une fonction sur un intervalle : ressource 136

III Méthode pour les lectures graphiques

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.

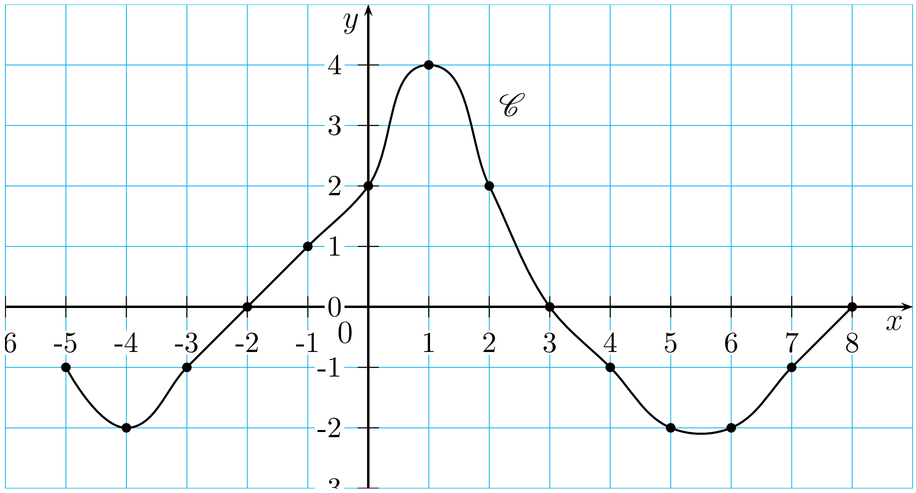


1. **Ensemble de définition. Ensemble des valeurs prises.**
   L'ensemble de définition se lit sur l'axe des abscisses.
   $D_f = [-5; 7]$
   L'ensemble des valeurs prises par f se lit sur l'axe des ordonnées.
   L'ensemble des valeurs prises par f est $[-3; 4]$.
2. **Lecture d'image.**
   Donner l'image de -3 par f.
   L'image de -3 par f est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse -3.
   $f(-3) = 1$
3. **Résolution d'équation / recherche d'antécédents.**
   Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont pour ordonnée 3.
   $S = \{-4; 5; 7\}$
   Lorsqu'on demande de rechercher les antécédents de 3 par f, c'est le même travail.
   Les antécédents de 3 par f sont -4, 5 et 7.
4. **Résolution d'inéquation.**
   Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
   Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée inférieure ou égale à 1.
   $\boldsymbol{S = [-3; 4]}$.

IV Exercices corrigés

Exercice 13

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.

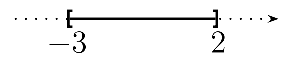
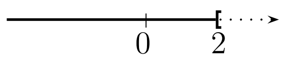
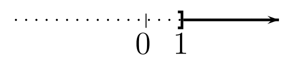
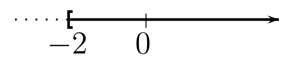
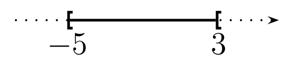
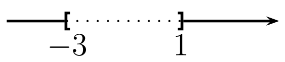
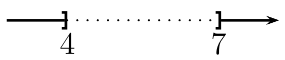
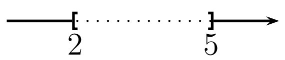
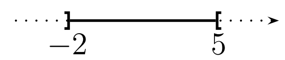
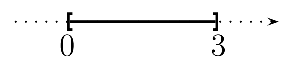


1. Donner le domaine de définition de f.
   $D_f = [-5; 8]$.
2. Lire graphiquement l'image par f de chacun des réels suivants : -4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 5.
   L'image de -4 est l'ordonnée du point de la courbe de f qui a pour abscisse -4 :
   $f(-4) = -2$.
   En procédant de même on a $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$, et $f(5) = -2$.
3. Rechercher les antécédents de -2 par f.
   Les antécédents de -2 sont les réels $x \in D_f$ tels que $f(x) = -2$.
   Les antécédents de -2 sont -4, 5 et 6.
4. Rechercher les antécédents de -3 par f.
   -3 n'a pas d'antécédent par f.
5. On admet que le minimum de f est -2.1.
   Quel est l'ensemble des valeurs prises par f ?
   L'ensemble des valeurs prises par f est $[-2.1; 4]$.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$. Expliquer la méthode.
   Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée égale à 2.
   $S = \{0; 2\}$.
7. Résoudre de même l'équation $f(x) = 0$.
   Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2, 3 et 8.
   ($S = \{-2; 3; 8\}$).
8. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée strictement positive.
   $S =]-2; 3[$.
9. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -1$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée inférieure

ou égale à -1.
$S = [-5; -3] \cup [4; 7]$.

Exercice 14

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles	Représentation sur la droite graduée
$-3 \leqslant x \leqslant 2$	$[-3; 2]$	
$x < 2$	**$]-\infty; 2[$**	
$x > 1$	**$]1; +\infty[$**	
$x \geqslant -2$	$[-2; +\infty[$	
$-5 \leqslant x < 3$	**$[-5; 3[$**	
$x < -3$ ou $x > 1$	**$]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$**	
$x \leqslant 4$ ou $x > 7$	$]-\infty; 4] \cup]7; +\infty[$	
$x < 2$ ou $x > 5$	**$]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[$**	
$-2 < x < 5$	**$]-2; 5[$**	
$x \leqslant 3$ et $x \geqslant 0$	**$[0; 3]$**	

2. On considère les intervalles $I =]-\infty; 5[$ et $J = [-1; 9]$.
   Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.
   $I \cap J = [-1; 5[$.
   $I \cup J =]-\infty; 9]$.