Chapitre 1 : Second degré

I Introduction

Exercice 1 (avec un algorithme)
On considère l'algorithme suivant :

Entrer x
a prend la valeur $x + 2$
b prend la valeur $x - 6$
y prend la valeur $a \times b$
Afficher y

1. Montrer que si l'on entre 8, le nombre affiché en sortie est 20.
2. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ? On note f cette fonction.
3. Étudier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "l'algorithme renvoie un résultat toujours positif ou nul",
   (b) "f est croissante sur $\mathbb{R}$",
4. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)^2 - 16$.
   (b) En déduire que f admet un minimum de -16 et préciser en quelle valeur il est atteint.

Propriété (forme canonique de seconde)
Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, et c réels, $a \neq 0$.
Il existe des réels α et β uniques tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette expression est appelée la forme canonique de f.
Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de f est une parabole de sommet le point $S(\alpha; \beta)$.
La parabole est orientée vers le haut si et seulement si $a > 0$.
La parabole est orientée vers le bas si et seulement si $a < 0$.

Exercice 2 (exploiter la forme canonique)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le tableau de variation puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x - 5)^2 + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 7)^2 - 9$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x - 1)^2 - 6$

II Équation $ax^2+bx+c=0$

Définition (et propriété)
Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$.
Posons $\Delta = b^2-4ac$, (prononcer Delta). Δ est appelé le discriminant de f.
Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Démonstration
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[x^2+2\times x\times\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= ax^2+bx+c\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. □

On cherche maintenant à étudier l'équation $f(x)=0$.

On raisonne à partir de la forme canonique, $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta<0$.
  Alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ donc l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta=0$.
  Alors $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.
  $f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\dfrac{b}{2a}$.
  L'équation $f(x)=0$ a une unique solution qui est $-\dfrac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, on peut parler de $\sqrt{\Delta}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \qquad \text{(identité remarquable)} \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ a deux racines réelles :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Théorème (Équation $ax^2 + bx + c = 0$)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine réelle, et on ne peut pas factoriser $f(x)$.
- Si $\Delta = 0$, alors f a une unique racine (double) qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$,
  et f admet la factorisation
  $$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$
- Si $\Delta > 0$, alors f a deux racines réelles distinctes :
  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
  On a alors la factorisation
  $$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Exercice 3
Résoudre l'équation $x^2 + 7x + 10 = 0$. [1]

Exercice 4

1. Calcul mental du discriminant : ressource 3797
2. Résoudre une équation du second degré : ressource 108

III Signe de $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

1. $\Delta = 9$, puis on trouve $S = \{-5; -2\}$.

avec $\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]>0$ d'où :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

- Si $\Delta=0$

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta>0$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

avec $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Dans le cas[2] où $x_1<x_2$, on a

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Théorème (Signe du trinôme)
- Si $\Delta<0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta=0$, alors pour tout $x\neq-\dfrac{b}{2a}$, ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta>0$, alors ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $(-a)$ entre les racines.

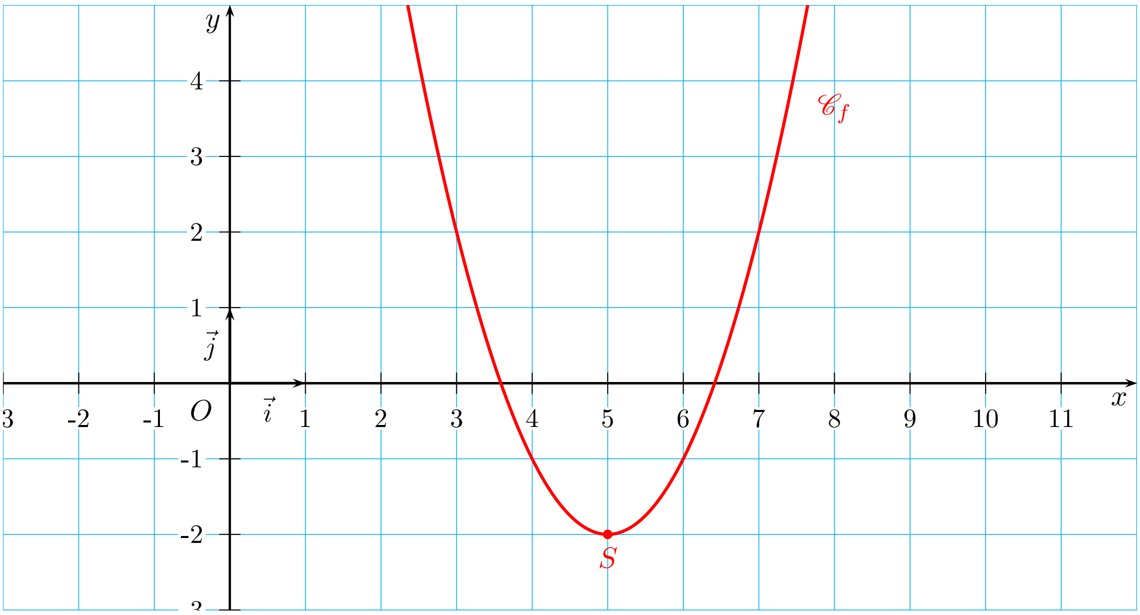
Exercice 5
1. Résoudre une inéquation du second degré : ressource 2910
2. Inéquation du second degré en trouvant une factorisation (sans calculer Δ) : ressource 2923

2. sinon, il faut les échanger dans la première ligne du tableau

IV Aspect graphique

Théorème
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
La courbe représentative de f est un parabole.
Son sommet est le point $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
La droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ (parallèle à (Oy)) est axe de symétrie de la courbe.
Lorsque $a > 0$ la parabole est tournée vers le haut.
Lorsque $a < 0$ la parabole est tournée vers le bas.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 23$.
Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
$x_S = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{10}{2} = 5$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 23 = 8$.
$y_S = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-8}{4} = -2$.
Le sommet de la parabole est le point $S(5; -2)$.



Remarque
1. On peut peut aussi trouver l'ordonnée du sommet en calculant $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
   Sur l'exemple précédent, $y_S = f(5) = 25 - 50 + 23 = -2$.
2. Lien avec la forme canonique vue en seconde :
   Si l'on a une expression de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, alors le sommet S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Exercice 6
1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole : ressource 3936
2. Indiquer la nature de l'extremum, sa valeur, et le nombre pour lequel il est atteint : ressource 3935

V Algorithme de résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

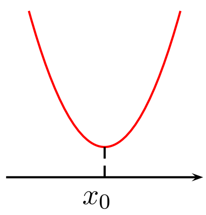
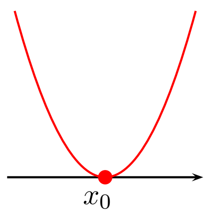
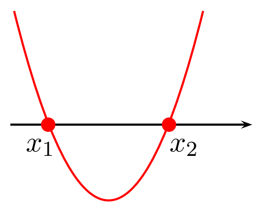
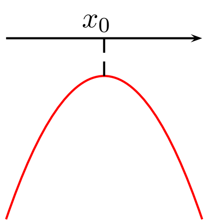
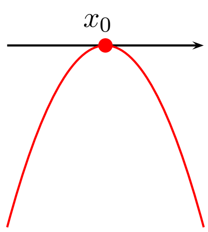
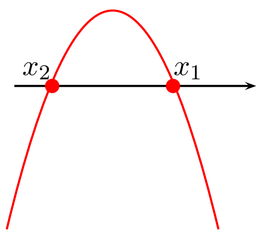
Algorithme TI-82, TI-83

```
: Prompt A,B,C
: B∧2-4AC → D
: Disp "Delta=",D
: If D>0
: Then
: Disp "Deux solutions"
: Disp (-B-√(D))/(2A)▶Frac, (-B+√(D))/(2A)▶Frac
: Else
: If D=0
: Then
: Disp "Une solution"
: Disp (-B)/(2A)▶Frac
: Else
: Disp "Pas de solution"
:End
:End
:Pause
:Disp "sommet"
:Disp -B/(2A)▶Frac, -D/(4A)▶Frac
```

On affiche de plus les coordonnées du sommet de la parabole.

VI Synthèse

$f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac$.
Sommet de la parabole $S(\alpha; \beta)$: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

Discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Équation $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	Pas de factorisation	$a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
Allure si $a > 0$			
Allure si $a < 0$			
Signe de $ax^2 + bx + c$	Toujours du signe de a	Pour $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, signe de a	Signe de a à l'extérieur des racines

VII Complément

VII.1 Somme et produit des racines lorsque $\Delta > 0$

On suppose ici que $\Delta > 0$.

$$\begin{array}{rcl} ax^2 + bx + c & = & a(x - x_1)(x - x_2) \\ a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) & = & a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right] \end{array}$$

Par identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array} \right.$$

Théorème (Somme et produit des racines)

1. Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ a des racines (i.e. $\Delta > 0$), leur somme est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.
2. Deux nombres ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ce sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$.

Remarque
Le second point fournit une méthode pour trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Exercice 7
Existe-t-il des rectangles dont le périmètre mesure 22 cm et l'aire 24 cm^2 ? Lesquels ? [3]

3. $S = 11$, $P = 24$, $x^2 - 11x + 24 = 0$: les seules dimensions possibles sont 8 et 3.