Correction de l'interrogation n° 8

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

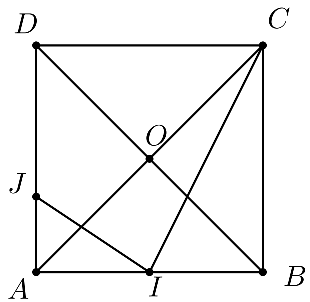
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB=2$, $BC=3$.
   Comme $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.}$
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB=6$.
   Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
   Comme ABC est isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le mileu de $[AB]$.
   D'après la formule du projeté,
   $$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}\\ & = & 6\times\dfrac{6}{2}\\ & = & 18\end{array}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18.}$
3. $AB=4$, $BC=3$, et $AC=6$.
   D'après une formule du produit scalaire avec les normes,
   $$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} & = & \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2+||\overrightarrow{AC}||^2-||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2\right)\\ & = & \dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-||\overrightarrow{CB}||^2\right)\\ & = & \dfrac{1}{2}(16+36-9)\\ & = & \dfrac{43}{2}\end{array}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21.5.}$
4. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, $A(-5;2)$, $B(-2;-1)$ et $C(4;0)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\ -2\end{pmatrix}$.
   D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :
   $$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} & = & xx'+yy'\\ & = & 3\times 9-3\times(-2)\\ & = & 33\end{array}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=33.}$
5. $AB=AC=2$, et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA})=-\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.
   $$\begin{array}{rcl}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) & = & (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA})+\pi\quad[2\pi]\\ & = & -\dfrac{\pi}{3}+\pi\quad[2\pi]\\ & = & \dfrac{2\pi}{3}\quad[2\pi]\end{array}$$
   D'après la formule du cosinus,
   $$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} & = & AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\\ & = & 2\times 2\times\cos\dfrac{2\pi}{3}\\ & = & 2\times 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\\ & = & -2\end{array}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2.}$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$.

Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. • $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-AD\times AD=-1$ (puisque D est le projeté orthogonal de C sur (AD)).
   • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
   De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=-AB\times AI=-1\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ puisque I est le projeté orthogonal de O sur (AB)).
   Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=-\dfrac{1}{2}$.
   • $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   Or $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
   De plus, $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,
   donc $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}BC^2=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}$.

2. (a) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, I a pour coordonnées $(\frac{1}{2};0)$ et J a pour coordonnées $(0;\frac{1}{3})$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.
   C a pour coordonnées $(1;1)$, donc $\overrightarrow{IC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\ 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

   (b) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IC}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times 1=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$.

   (c) On a $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IC}=IJ\times IC\cos(\widehat{JIC})$.
   Or $IJ=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\dfrac{13}{36}}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$.
   Et $IC=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   On en déduit que $\dfrac{1}{12}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos(\widehat{JIC})$,
   donc $\cos(\widehat{JIC})=\dfrac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$.

Exercice 3 (5 points)

Le directeur sportif d'un club de football professionnel souhaite recruter un joueur pour la saison à venir. Il recherche un attaquant qui marque au moins un but par match 7 fois sur 10.

Il rencontre un agent de joueur qui lui propose Diego dont il gère la carrière.

Lors de la saison précédente, Diego, qui se trouvait dans un autre club, a marqué au moins un but dans 20 matchs sur les 38 journées de championnat.

On fait l'hypothèse qu'il marque au moins un but par match 7 fois sur 10. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de matchs où il marque au moins un but dans la saison (soit sur les 38 matches joués). On admet que les performances sont indépendantes d'un match à l'autre.

1. On répète 38 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p=0,7$ (on considère que le "succès" est que Diego marque au moins un but). La variable X qui compte le nombre de matchs où Diego marque au moins un but suit la loi binomiale $\mathscr{B}(38;0,7)$.

2. Le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)$ est $a=21$.
   En effet, $P(X\leqslant 20)\approx 0,018$, et $P(X\leqslant 21)\approx 0,039$.
   Le plus petit entier b tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0,975$ est $b=32$.
   En effet, $P(W\leqslant 31)\approx 0,964$, et $P(X\leqslant 32)\approx 0,986$.
   $\dfrac{a}{n}=\dfrac{21}{38}\approx 0,55$.
   $\dfrac{b}{n}=\dfrac{32}{38}\approx 0,84$.
   Un intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 95% est $I=[0,55;0,84]$.

3. Au regard des résultats de Diego la saison précédente, quelle sera la décision du directeur sportif ?
   $f=\dfrac{20}{38}\approx 0,53\notin I$.
   On peut rejeter l'hypothèse selon laquelle Diego marque au moins un but par match 7 fois sur 10, avec un risque d'erreur d'environ 5 %.
   Le directeur sportif devrait choisir de ne pas le recruter.

4. $f=\dfrac{25}{38}\approx 0,65\in I$.
   Dans ce cas, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle l'attaquant marque au moins un but par match 7 fois sur 10.
   Le directeur sportif peut donc envisager de recruter un tel attaquant.