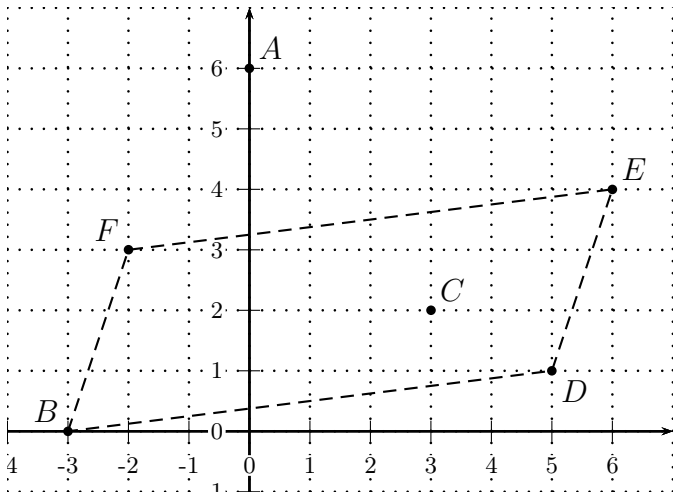
Terminale STI. Correction du DM2 de spécialité

Exercice 1 (59 page 301)

Dans le plan complexe muni d'un repère, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 6\mathrm{i}$; $b = -3$, $c = 3 + 2\mathrm{i}$.
Le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour affixe $w = 5 - 5\mathrm{i}$.

1. Faire une figure.



2. Calculer les affixes des images suivantes.
   (a) D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   L'écriture complexe de la transaltion est $z' = z + w$.
   Donc $z_D = a + w = 6\mathrm{i} + 5 - 5\mathrm{i} = 5 + \mathrm{i}$.
   (b) E est l'image de C par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.
   L'écriture complexe de l'homothétie est $z' = 2 \times z$.
   $z_E = 2 \times c = 2 \times (3 + 2\mathrm{i}) = 6 + 4\mathrm{i}$.
   (c) F est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   L'écriture complexe de la rotation est $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z$.
   Donc $z_F = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_c = (\cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}) \times (3 + 2\mathrm{i})$
   $z_F = (0 + 1\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i}) = -2 + 3\mathrm{i}$.
3. Montrer que $BFED$ est un paralélogramme.
   $BFED$ est un paralélogramme ssi $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DE}$.
   $z_{\overrightarrow{BF}} = z_F - z_B = -2 + 3\mathrm{i} - (-3) = 1 + 3\mathrm{i}$.
   $z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = 6 + 4\mathrm{i} - (5 + \mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i}$.
   Donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DE}$, et le quadrilatère $BFED$ est un parallélogramme.

Exercice 2 (31 page 297, facultatif)

On donne $R = 10$, $\omega = 5000$, $L = 0,02$, et $C = 10^{-5}$.
On admet que l'impédance complexe $\underline{Z}$ est donnée par
$\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{L\omega j} + C\omega j$ où le nombre complexe i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$ est noté j.

1. $\dfrac{1}{\underline{Z}}$ sous forme algébrique puis exponentielle (avec r et θ arrondis à 10^{-2}).
   $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5000 \times 0,02j} + 10^{-5} \times 5000j = 0,1 + \dfrac{1}{100j} + 0,05j$.
   Or, $\dfrac{1}{j} = \dfrac{-j}{j \times (-j)} = \dfrac{-j}{1} = -j$.
   Donc $\dfrac{1}{\underline{Z}} = 0,1 - 0,01j + 0,05j = 0,1 + 0,04j$.
   Sous forme algébrique, $\dfrac{1}{\underline{Z}} = 0,1 + 0,04j$.
   $r = \left|\dfrac{1}{\underline{Z}}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,04^2} = \dfrac{\sqrt{29}}{50} \approx 0,11$.
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} \approx \dfrac{0,1}{0,11} \approx 0,91$.
   $\sin\theta = \dfrac{b}{r} \approx \dfrac{0,04}{0,11} \approx 0,36$.
   Pour un argument à la calculatrice, $Arccos(0,91) \approx 0,43$.
   Donc $\theta \approx 0,43$ ou $-0,43$.
   Comme $\sin\theta > 0$, on retient $\theta \approx 0,43$.
   Sous forme exponentielle, $\dfrac{1}{\underline{Z}} \approx 0,11\mathrm{e}^{0,43\mathrm{i}}$.
2. En déduire $\underline{Z}$ sous forme exponentielle.
   $\underline{Z} \approx \dfrac{1}{0,11\mathrm{e}^{\mathrm{i}0,43}} \approx \dfrac{1}{0,11} \times \mathrm{e}^{-0,43\mathrm{i}} \approx 9,09\mathrm{e}^{-0,43\mathrm{i}}$
3. En déduire l'impédance $|\underline{Z}|$.
   L'impédance est le module, soit $Z = |\underline{Z}| \approx 9,09$.
4. Le déphasage φ est un argument de $\underline{Z}$,
   soit $\varphi = \arg(\underline{Z}) \approx -0,43$.