BTS. Corrrection du contrôle n° 9

Exercice 1 (3 points)
Compléter sur l'énoncé.
On considère l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ et son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
   Les solutions de E_0 sont les fonctions de la forme $y(t) = (At + B)e^{r_0 t}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (3 points)
Résoudre les équations homogènes suivantes.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
   $r^2 - 2r + 1 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$.
   $r_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = (At+B)e^t$, avec A, $B \in \mathbb{R}$.
2. $y'' - 36y = 0$.
   $\Delta = 0^2 + 4 \times 36 = 144 > 0$.
   $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0 - 12}{6} = -6$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 6$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = Ae^{-6t} + Be^{6t}$, avec A, $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (3 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 17y = 0$.
   $\Delta = 4 - 4 \times 17 = -64 < 0$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -1$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{8}{2} = 4$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = e^{-t}(A\cos(4t) + B\sin(4t))$, avec A, $B \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution particulière f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
   $f(0) = 1$ ssi $e^0(A\cos 0 + B\sin 0) = 1$ ssi $A = 1$.
   Ainsi, $f(t) = e^{-t}(\cos(4t) + B\sin(4t))$.
   $f'(t) = e^{-t}[(-1) \times ((\cos(4t) + B\sin(4t)) + (-4\sin(4t) + 4B\cos(4t))]$
   $f'(t) = e^{-t}[(4B - 1)\cos(4t) + (-B - 4)\sin(4t)]$.
   $f'(0) = -1$ ssi $4B - 1 = -1$ ssi $B = 0$.
   La solution telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ est définie par $f(t) = e^{-t} \times \cos(4t))$.

Exercice 4 (5 points)
On considère l'équation différentielle (E) :

$$x''(t) - 9x(t) = -10\sin(t)$$

où x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $x'' - 9x = 0$.
   $r^2 - 9 = 0$ ssi $r = -3$ ou $r = 3$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $x(t) = Ae^{-3t} + Be^{3t}$, avec A, $B \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \sin(t)$ soit une solution de (E).
   $g'(t) = \cos t$, et $g''(t) = -sin(t)$.
   Donc $g''(t) - 9g(t) = -\sin(t) - 9sin(t) = -10\sin(t)$.
   $\boxed{g \text{ est bien une solution particulière de } E.}$
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
   $\boxed{\text{Les solutions de } E \text{ sont les fonctions de la forme } x(t) = \sin(t) + A\mathrm{e}^{-3t} + B\mathrm{e}^{3t}, \text{ avec } A,\ B \in \mathbb{R}.}$
4. Déterminer la solution x de (E) vérifiant $x(0) = 0$ et $x'(0) = 4$.
   $x(0) = 0$ ssi $0 + A + B = 0$ ssi $A + B = 0$.
   $x'(t) = \cos(t) - 3A\mathrm{e}^{-3t} + 3B\mathrm{e}^{3t}$.
   Donc $x'(0) = 4$ ssi $1 - 3A + 3B = 4$ ssi $B - A = 1$.
   Ainsi, $B = -A$ et $B = A + 1$, soit $A + 1 = -A$, $A = -0,5$ et $B = 0,5$.
   $\boxed{\text{La solution de } (E) \text{ vérifiant } x(0) = 0 \text{ et } x'(0) = 4 \text{ est } x(t) = \sin(t) - 0,5\mathrm{e}^{-3t} + 0,5\mathrm{e}^{3t}}$.

Exercice 5 (6 points)

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' + 2y = 2x - 5.$$

où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
   $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$.
   $r_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = 2$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation homogène } y'' - 3y' + 2y = 0 \text{ sont les fonctions de la forme } y(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}, \text{ avec } A,\ B \in \mathbb{R}.}$
2. Déterminer une fonction affine g solution de (E).
   On pose $g(x) = ax + b$, alors $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$.
   $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 0 - 3a + 2(ax + b) = 2ax + 2b - 3a$.
   g est solution de (E) ssi $2ax + 2b - 3a = 2x - 5$
   ssi $(2a = 2$ et $2b - 3a = -5)$ ssi $(a = 1$ et $b = -1)$.
   $\boxed{\text{Une solution particulière de } (E) \text{ est } g(x) = x - 1.}$
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
   $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions de la forme } y(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} + x - 1, \text{ avec } A,\ B \in \mathbb{R}.}$
4. Déterminer la solution dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -2.
   $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$.
   $y(0) = 0$ ssi $A + B - 1 = 0$ ssi $A + B = 1$.
   $y'(x) = A\mathrm{e}^{x} + 2B\mathrm{e}^{2x} + 1$
   $y'(0) = -2$ ssi $A + 2B + 1 = -2$ ssi $A + 2B = -3$.
   $B = 1 - A$, en substituant, il vient $A + 2(1 - A) = -3$ soit $A = 5$ et $B = -4$.
   $\boxed{\text{La solution cherchée est } y(x) == 5\mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{2x} + x - 1}$