

Chapitre 13 : Fonctions de référence

I La fonction carré

Définition

La fonction carré est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Exercice 1

1. Calculer l'image par la fonction carré des réels -3 ; -1 ; 0 ; 2 ; $\sqrt{7}$; $\frac{11}{3}$
2. Montrer que f n'est pas croissante sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f n'est pas non plus décroissante sur \mathbb{R} .

Théorème (sens de variation)

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	

(Arrows in the original image point from $-\infty$ to 0 and from 0 to $+\infty$ in the x^2 row.)

Démonstration

Soient $a, b \in] -\infty; 0]$. Supposons que $a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - b^2 \\ &= (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

Comme on suppose que $a < b$, $a - b < 0$.

Comme a et b sont négatifs (ils appartiennent $] -\infty; 0]$), $a + b < 0$.

D'après la règle des signes, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 > 0$.

Ainsi, pour tous a et b appartenant à l'intervalle $] -\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0]$.

On montre de façon analogue qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$. □

Exercice 2 (comparaison et encadrement)

1. Comparer sans calculatrice les carrés des réels a et b .
 - (a) $a = 5,7$ et $b = 5,8$
 - (b) $a = -3,17$ et $b = -3,16$
2. Donner le meilleur encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants. Justifier.
 - (a) $4 < x < 5$
 - (b) $-7 \leq x \leq -6$
 - (c) $-5 \leq x \leq 2$
 - (d) $-4 < x \leq 9$

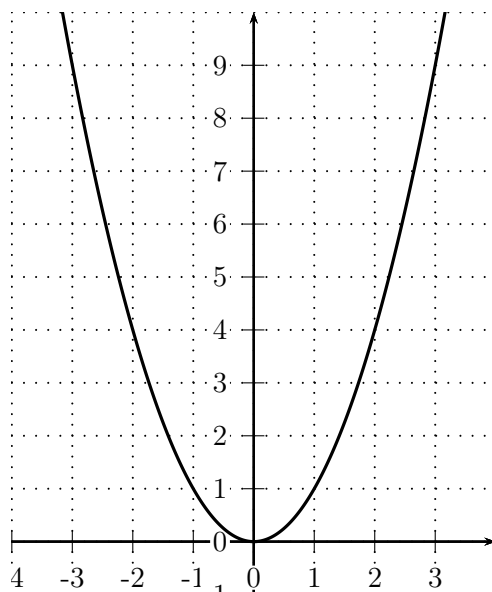
Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
x^2									

Propriété (représentation graphique)

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** de sommet O .

L'axe des ordonnées (Oy) est axe de symétrie de la courbe.



Remarque

- La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se traduit par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.
Autrement dit, deux opposés ont le même carré.
On dit que la fonction carré est **paire**.
- L'ensemble des valeurs prises par la fonction carré est $[0; +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ (un carré est toujours positif).

Exercice 3

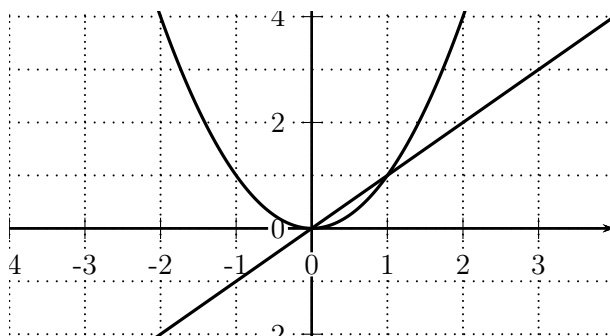
Considérons la fonction carré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les antécédents de 9 par f .
2. Rechercher les antécédents de -2 par f .
3. Soit k un nombre réel.
Résoudre suivant les valeurs de k l'équation $x^2 = k$.

Exercice 4 (comparaison de x et de x^2)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner un réel a vérifiant $a^2 > a$, et un réel b vérifiant $b^2 < b$.
2. Factoriser $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le tableau de signe de $f(x) - g(x)$ sur \mathbb{R} .
4. En déduire la comparaison de x^2 et x , et la position relative des courbes de f et g .
Vérifier la cohérence avec le graphique ci-dessous.



II La fonction cube

Définition

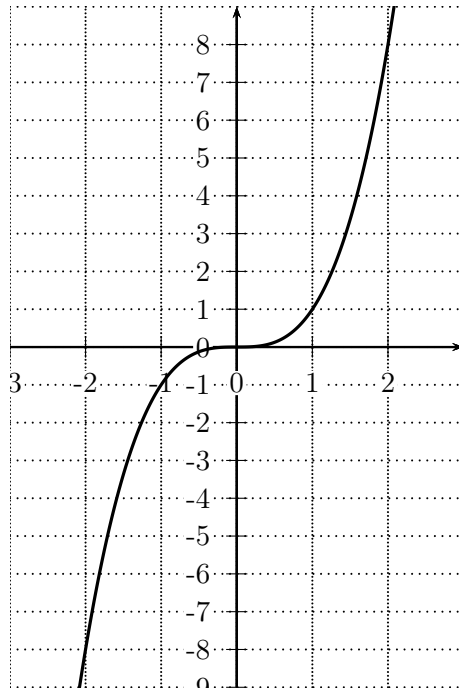
La fonction cube est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Propriété (admise)

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Remarque

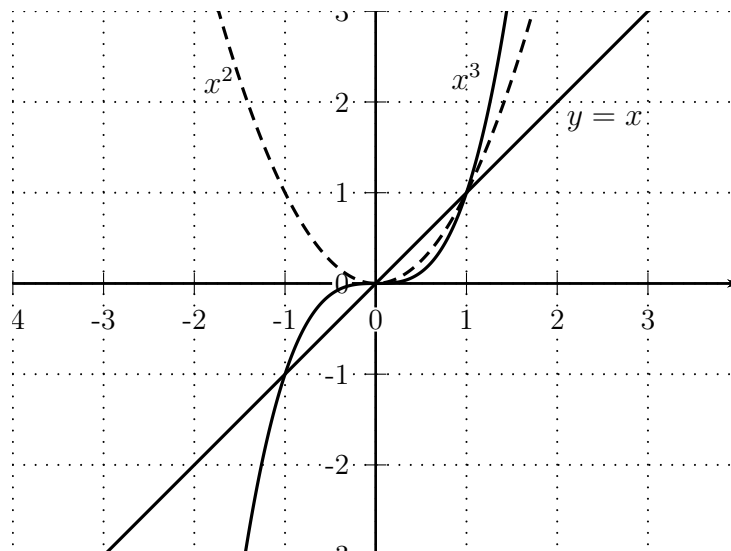
La fonction cube est **impaire**. La courbe est symétrique par rapport au point O : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$



Exercice 5 (comparaison de x , x^2 et x^3 sur $[0; +\infty[$)

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, et $h(x) = x^3$.

1. Factoriser l'expression $g(x) - h(x)$ sur \mathbb{R} , puis étudier son signe sur \mathbb{R} .
2. En déduire la comparaison de x^2 et x^3 sur \mathbb{R} .
3. À l'aide du résultat de l'exercice précédent et de celui-ci, comparer x , x^2 et x^3 lorsque $x \geq 0$. Vérifier graphiquement.



III La fonction inverse

Définition

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

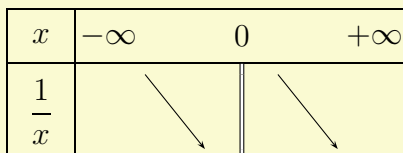
Remarque

La fonction inverse n'est pas définie en 0 (0 n'a pas d'inverse).

Théorème

La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0[$,
et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			



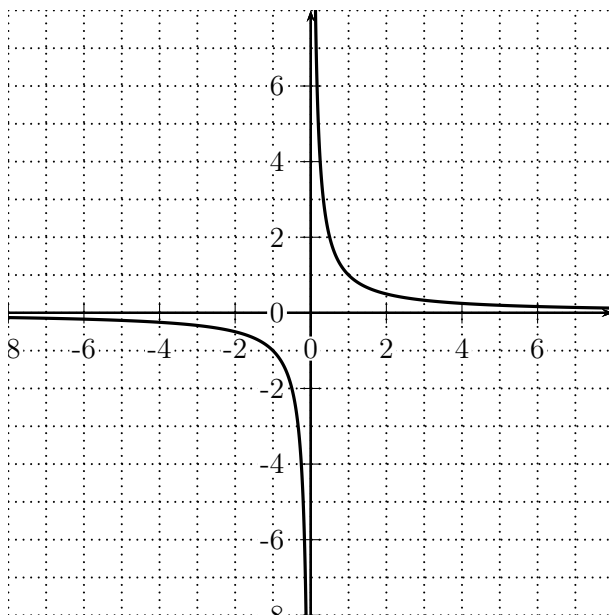
Exercice 6

- Comparer les inverses de a et b .
 - $a = 1,3$ et $b = 1,4$
 - $a = -2,7$ et $b = -2,6$
- Donner le meilleur encadrement de $\frac{1}{x}$.
 - $5 < x < 10$
 - $-9 < x < -7$

Exercice 7

Démontrer le théorème relatif aux variations de la fonction inverse.

Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$



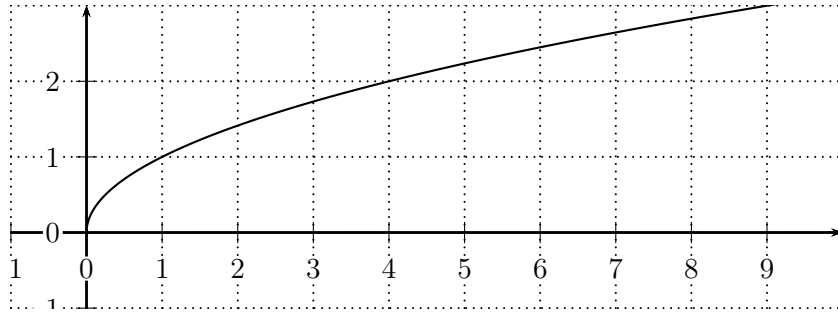
Remarque

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**.
La fonction inverse est **impaire**. L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe.

IV La fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



Propriété

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

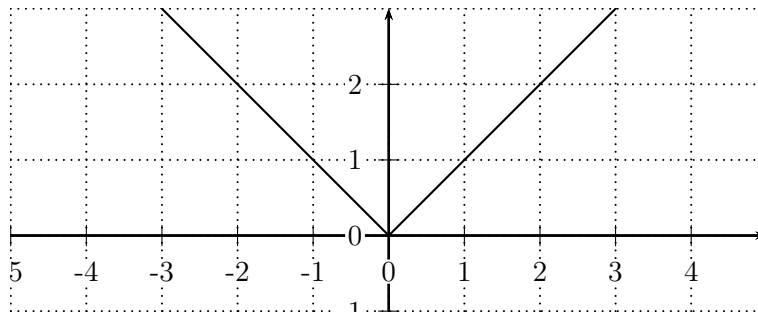
V La fonction valeur absolue

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ défini par :

- si $x \geq 0$, alors $|x| = x$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Propriété ("distance" entre deux réels)

Pour tous réels a et b , la distance entre a et b (longueur AB où A et B sont les images des réels a et b sur la droite graduée) est $|a - b|$.

Remarque

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $r > 0$.
L'ensemble des nombres réels x tels que $|x - a| \leq r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.