Correction du devoir maison n° 5

Exercice 1 (n° 86 pag 60)

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2-2x+5}$.

1. Justifier que f est défnie sur $\mathbb{R}$.
   $f(x)$ existe ssi $x^2-2x+5 \neq 0$.
   On étudie le trinôme x^2-2x+5.
   $\Delta = b^2-4ac = 4-20 = -16 < 0$.
   Donc le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{-3}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2} = 1$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.
   De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2} = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$.
   Donc la droite (d) d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote.
   On note (d) la droite d'équation $y=-3$.
   On étudie le signe de $f(x)-(-3)$.
   $f(x)+3 = \dfrac{-3x^2}{x^2-2x+5} + \dfrac{3x^2-6x+15}{x^2-2x+5} = \dfrac{-6x+15}{x^2-2x+5}$.
   On a vu que le discriminant du dénominateur x^2-2x+5 est strictement négatif, donc x^2-2x+5 est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (signe de "a"), et $f(x)+3$ a le même signe que $-6x+15$.
   $-6x+15=0$ ssi $x=\dfrac{5}{2}=2,5$.

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f(x)+3$		$+$	0	$-$	

   Sur $]-\infty;2,5[$, $f(x)+3>0$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d).
   Sur $]2,5;+\infty[$, $f(x)+3<0$, donc $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).

4. Déterminer le tableau de variation de f.
   Comme toute fraction rationnelle, f est dérivable sur son ensemble de définition.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = \dfrac{-6x(x^2-2x+5)-(-3x^2)\times(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{6x^2-30x}{(x^2-2x+5)^2} = \dfrac{6x(x-5)}{(x^2-2x+5)^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2-2x+5)^2 > 0$.
   Donc $f'(x)$ a le même signe que $6x^2-30x$.
   $6x(x-5)=0$ ssi $x=0$ ou $x=5$.
   Le trinôme $6x^2-30x$ est positif, (signe de a) à l'extérieur des racines.
   $f(0) = \dfrac{-3\times 0^2}{0^2-2\times 0+5} = 0$.
   $f(5) = \dfrac{-3\times 5^2}{5^2-2\times 5+5} = \dfrac{-75}{20} = -3,75$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3,75$	$\nearrow$	-3

Exercice 2 (n° 118 page 62)

sur $]-\infty;-2]$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$, pour tout $x<-2$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, et $h(x)=(f(x))^3$.

Limites en $-\infty$.

$x^2+2x = x(x+2)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par composée, } \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty.}$$

Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0$.

$$\boxed{\text{Par composée, } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} = 0.}$$

On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} X^3 = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par composée, } \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+2x}\right]^3 = +\infty.}$$

Limites en -2^-.

$\lim\limits_{x\to-2} x^2+2x = (-2)^2+2\times -2 = 0^{(+)}$.

Or, $\lim\limits_{X\to0} \sqrt{X} = 0+$.

$$\boxed{\text{Par composée, } \lim_{x\to-2^-} \sqrt{x^2+2x} = 0+.}$$

Comme $\lim\limits_{X\to0+} \dfrac{1}{X} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par composée, } \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} = +\infty.}$$

On rappelle que $\lim\limits_{x\to-2^-} \sqrt{x^2+2x} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{X\to0} X^3 = 0$.

$$\boxed{\text{Par composée, } \lim_{x\to-2^-} \left[\sqrt{x^2+2x}\right]^3 = 0.}$$