

Limites de suites

I Suite ayant une limite infinie

Définition

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

On a un énoncé analogue pour une suite qui diverge vers $-\infty$.

Exemple :

Les suites (n^2) , $(\sqrt{n})$, (n^k) où $k \geq 1$, (e^n) divergent vers $+\infty$.

II Suite convergeant vers un réel ℓ

Définition

Soient (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.

On dit que (u_n) admet pour limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim u_n = \ell$.

Formulation symbolique :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Remarque

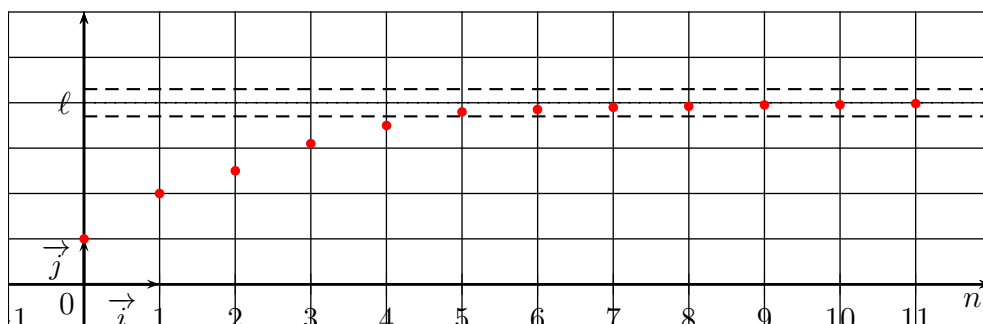
1. Il est inutile de préciser $n \rightarrow +\infty$ car c'est toujours le cas dans ce chapitre.
On note simplement $\lim u_n = \ell$ pour désigner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
2. L'écriture $|u_n - \ell| < \varepsilon$ signifie que l'écart entre u_n et ℓ est strictement inférieur à ε .
Autrement dit,

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| < \varepsilon &\Leftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\\ &\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \end{aligned}$$

Illustration :

Le graphique ci-dessous représente une suite (u_n) qui converge vers $\ell = 4$.

En prenant $\varepsilon = 0,3 > 0$, on constate que l'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est vérifiée à partir du rang $N = 5$.



Propriété (quelques limites usuelles)

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \geq 1$, convergent vers 0.

Démonstration

On montre que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

Soit $a > 0$, on considère l'intervalle ouvert centré en 0 $I =]-a; a[$.

Pour tout $n > \frac{1}{a}$, on a $0 < \frac{1}{n} < a$, et donc $\frac{1}{n}$ appartient à I .

L'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

Remarque

1. Une suite constante converge vers la valeur de la constante.
2. Il existe des suites qui ne sont pas convergentes (on dit alors divergentes).
Exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.
Les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ n'ont pas de limite. Elles sont divergentes.

Théorème

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

II.1 Lien avec les limites de fonctions**Théorème (suite définie par son terme général)**

Soit (u_n) une suite définie par son terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[M; +\infty[$.

1. si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim u_n = \ell$.
2. si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
3. si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

On peut donc utiliser les limites en $+\infty$ de fonctions de référence pour déterminer les limites de suites usuelles.

III Opérations sur les limites

Tous les résultats suivants sont admis. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes ou divergeant vers l'infini. ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

III.1 Limite d'une somme

Si $\lim u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim(u_n + v_n) =$						

Exemple :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n}$$

III.2 Limite d'un produit

Si $\lim u_n =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $\lim v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors, $\lim(u_n \times v_n) =$									

Exemple :
 $\lim_{+\infty} 3n^2 \sqrt{n}$

III.3 Limite d'un quotient

III.3.a cas où la limite de (v_n) n'est pas nulle

Si $\lim u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si $\lim v_n =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim \frac{u_n}{v_n} =$							

III.3.b cas où la limite de (v_n) est nulle

Si $\lim u_n =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim v_n =$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\lim \frac{u_n}{v_n} =$					

Exemple :
 $\lim_{-\infty} \frac{4n}{3n^2 \sqrt{n}}$

Remarque (Récapitulatif des formes indéterminées)

1. $+\infty - \infty$,
2. $\pm\infty \times 0$,
3. $\frac{0}{0}$,
4. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Indication pour lever les indéterminations

Transformer l'écriture, développer ou factoriser.

Mettre en facteur le terme prépondérant (plus grande puissance de n) au numérateur et au dénominateur.

IV Théorèmes de comparaison

Théorème (théorèmes des gendarmes)

1. Théorème des gendarmes.

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles, soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si,

— à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$,

— et $\lim u_n = \ell$, et $\lim w_n = \ell$,

alors (v_n) converge vers ℓ .

Démonstration

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors à partir d'un certain rang q , tous les termes de la suite (u_n) sont dans I .

De même, à partir d'un certain rang q' , tous les termes de la suite (w_n) sont dans I .

Posons alors $N = \max(p, q, q')$.

Pour tout $n \geq N$, on a

$$a < u_n \leq v_n \leq w_n < b.$$

Donc, à partir de ce rang r , tous les termes de la suite (v_n) appartiennent I .

Par définition, la suite (v_n) converge vers ℓ . $\lim v_n = \ell$. □

Exemple :

Étudier la convergence des suites : $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$.

$$v_n = \frac{3 + 5 \times (-1)^n}{n^2}.$$

Remarque

Si (u_n) est une suite bornée, et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

Théorème (comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

1. Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

2. Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Démonstration

1. On suppose qu'il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \leq v_n$.

Soit $A > 0$.

Comme $\lim u_n = +\infty$, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, $u_n \geq A$.

Posons $N = \max(n_1; n_2)$.

Pour tout $n \geq N$, on a $A \leq u_n \leq v_n$, et donc $v_n \geq A$.

On a montré que pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $v_n \geq A$.

Donc $\lim v_n = +\infty$.

2. Il suffit d'adapter la démonstration du 1. □

Exemple : étudier la convergence des suites

$$u_n = 2n + 3 \sin(n).$$

$$v_n = 2 \times (-1)^n - 4n.$$