T5. Correction du Dm4

Exercice 1 (n° 94 page 318)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue des parties successives.
On admet que :

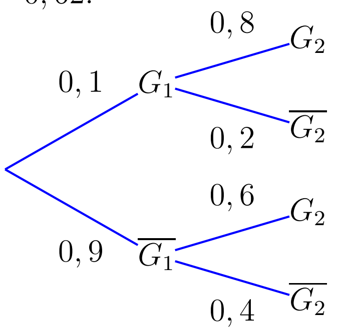
— la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,1 ;

— s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,8 ;

— s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante 0,6.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note G_n l'événement "il gagne la n^{e} partie", et p_n la probabilité de G_n.
On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.



Les événements G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_2 &= P\left(G_2\right) \\ &= P\left(G_1 \cap G_2\right) + P\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) \\ &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) \\ &= 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 \\ &= 0,62 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } p_2 = 0,62.}$

2. Le joueur a gagné la 2e partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

$$P_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{0,9 \times 0,6}{0,62} \approx 0,87.$$

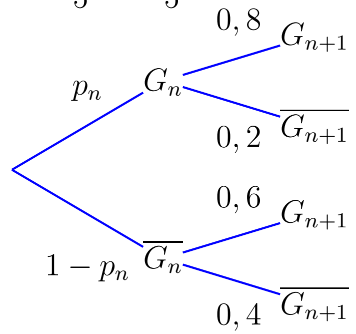
$\boxed{\text{Sachant qu'il a gagné la 2e partie, la probabilité qu'il ait perdu la première est environ 0,87.}}$

3. Calculer la probabilité que la joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.
On cherche $P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)$.
En raisonnant sur l'événement contraire,

$$\begin{aligned} P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) &= 1 - P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \\ &= 1 - 0,9 \times 0,4 \times 0,4 \\ &= 0,856 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'il ait gagné au moins une partie sur les trois premières est 0,856.}}$

4. Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.



Il est clair que G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers.
D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(G_{n+1}\right) \\ &= p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) \\ &= 0,8p_n + 0,6\left(1 - p_n\right) \\ &= 0,2p_n + 0,6 \\ &= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \geqslant 1,\ p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.}$$

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Initialisation

$p_1 = 0,1$.

$\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = 0,1$.

Donc $p_1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1$.

L'égalité est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité

Considérons un entier $k \geqslant 1$.

Supposons que $p_k = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^k$.

Alors,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{1}{5}p_k + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^k\right) + \frac{3}{5} \\ &= -\frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} + \frac{3}{20} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

6. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, $lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

$$\boxed{\text{Par produit et somme, } \lim p_n = \frac{3}{4}.}$$

7. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$.

Montrons que (p_n) est croissante.

La suite de terme général $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est décroissante car $0 < \frac{1}{5} < 1$.

En multipliant par $\frac{-13}{4} < 0$, la suite $-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est croissante.

En ajoutant la constante $\frac{3}{4}$, $\boxed{(p_n) \text{ est croissante.}}$

Il suffit de déterminer le plus petit entier k tel que $\frac{3}{4} - p_k < 10^{-7}$ (cet entier existe car $\lim p_n = \frac{3}{4}$ et $p_n \leqslant \frac{3}{4}$).

Algorithme :

Début

n prend la valeur 1

p prend la valeur 0,1

Tant que $0,75 - p \geqslant 10^{-7}$

    n prend la valeur $n + 1$

    p prend la valeur $\frac{1}{5}p + \frac{3}{5}$

Fin Tant que

Afficher n.

Fin

On obtient $n = 11$.

$$\boxed{\text{Comme la suite } (p_n) \text{ est croissante, pour tout } n \geqslant 11,\ \frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}.}$$