## Correction du devoir maison n° 10

**Exercice 1**

On considère un carré $ABCD$ de côté 1, et $I$ le milieu de $[BC]$.

On note $\theta$ la mesure de l'angle $\widehat{IAC}$.

1. Montrer que la valeur exacte de $\cos\theta$ est $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

   On va exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ avec la formule du cosinus, et calculer sa valeur en utilisant la formule avec des coordonnées.
   En appliquant deux fois le théorème de Pythagore, on montre facilement que $AC=\sqrt{2}$ et $AI=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   D'après la formule du cosinus,

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} &= AI\times AC\times\cos\theta\\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta\end{aligned}$$

   Dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, on a $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.

   Comme $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

   Donc $C(1;1)$.
   Comme $I$ est le milieu de $[BC]$,
   $x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}=1$, et $y_I=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{1}{2}$.
   Donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$. On rappelle $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
   En utilisant l'expression du produit scalaire en repère orthonormé,

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} &= xx'+yy'\\ &= 1\times1+\frac{1}{2}\times1\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

   En identifiant les deux expressions de $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$,

   $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta &= \frac{3}{2}\\ \cos\theta &= \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{10}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{10}}\\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

   $\boxed{\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}.}$

2. En déduire la valeur arrondie au degré près de l'angle $\theta$.

   Avec la calculatrice, $\cos^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)\approx 18.43$.

   $\boxed{\text{Donc } \theta \text{ mesure environ 18 degrés.}}$