

Chapitre 8 : Variables aléatoires

I Variable aléatoire

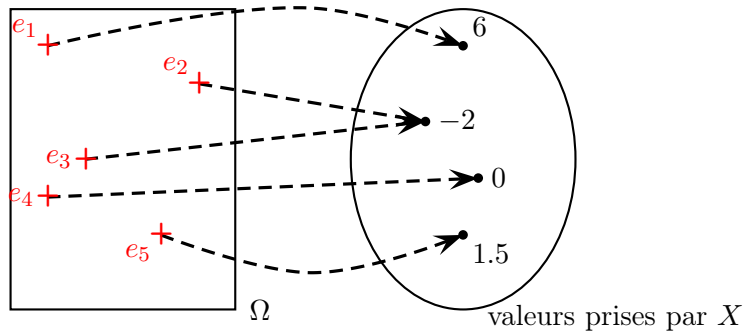
Définition (Variable aléatoire)

Soit $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ un univers fini.

Cette notation signifie que l'univers est composé de n issues notées e_1, e_2, \dots, e_n .

Une variable aléatoire X est une application de Ω dans \mathbb{R} .

Définir une variable aléatoire X revient donc à associer à chaque issue e_i un nombre réel x_i .

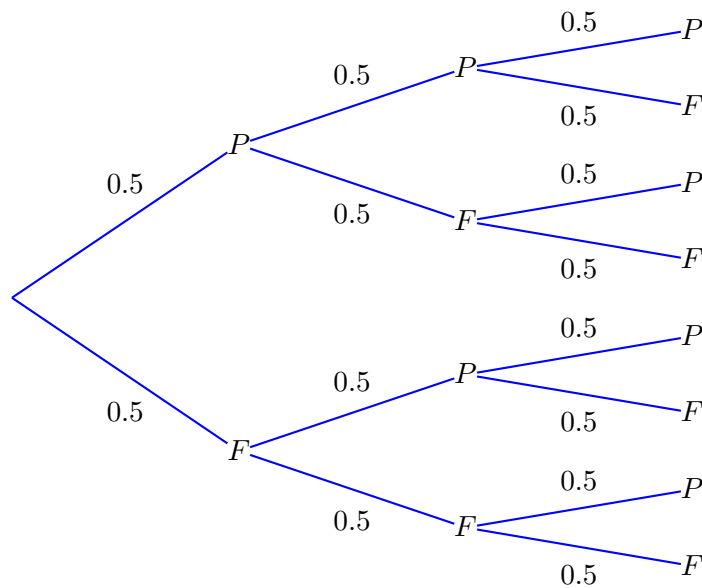


Remarque

Le nombre k de valeurs distinctes prises par la variable aléatoire X est toujours inférieur ou égal à n (nombre d'issues de Ω).

Exercice 1

On joue à Pile ou Face 3 fois de suite avec une pièce équilibrée.



1. Lister toutes les issues de Ω .
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue associe de nombre de Pile.
 - (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
 - (b) Décrire les évènements $\{X = 0\}$, $\{X = 2\}$, puis $\{X \leq 1\}$.

Définition

Soit Ω l'ensemble des issues d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

Pour tout nombre réel a , on note

- $\{X = a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe le nombre a .
- $\{X < a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe un réel strictement inférieur à a .

Remarque

L'événement contraire de $\{X < a\}$ est

Définition (Loi de probabilité de X)

Soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P . Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Déterminer la loi de probabilité de X consiste à trouver la probabilité de chacun des événements $X = x_j$, pour $1 \leq j \leq k$.

On la présente souvent sous la forme d'un tableau.

x_i	x_1	\dots	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	\dots	p_k

Remarque

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$.

On a toujours $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_k) = 1$.

Autrement dit, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Exercice 2

On reprend la situation de l'exercice précédent.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Définition (Espérance d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

L'espérance de X , notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i)$$

Définition (Variance et écart-type)

La variance de X , notée $V(X)$, est définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

L'écart-type de la variable X est noté $\sigma(X)$ et a pour valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

En posant $p_i = P(X = x_i)$ pour alléger, ces formules s'écrivent :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \times p_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 \times p_i$$

La variance et l'écart-type sont toujours positifs ou nuls.

Exercice 3

On reprend la situation de l'exercice précédent.

Déterminer $E(X)$, $V(X)$, et $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X .

Remarque

Lorsque X est une variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, l'espérance $E(X)$ correspond au gain moyen par partie que le joueur obtiendrait sur un très grand nombre de parties.

- $E(X) > 0$ signifie que le jeu est intéressant pour le joueur ;
- $E(X) = 0$ ssi le jeu est équitable ;
- $E(X) < 0$ signifie que le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

Dans ce contexte, l'écart-type est un indicateur de la dispersion des gains par rapport à l'espérance (gain moyen sur une partie).

Plus σ est grand, plus le jeu est risqué.

II Complément

Théorème (formule de König-Huygens)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

$$V(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2$$

Ceci peut également s'écrire $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k ((x_i)^2 - 2x_i \times E(X) + (E(X))^2) P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i)^2 P(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^k x_i \times P(X = x_i) + (E(X))^2 \times \sum_{i=1}^k P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i)^2 P(X = x_i) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \times 1 \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i)^2 P(X = x_i) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Donc $V(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2$. □

Propriété

Soit X une variable aléatoire.

Pour tous réels a et b , $E(aX + b) = aE(X) + b$, et $V(aX) = a^2V(X)$.

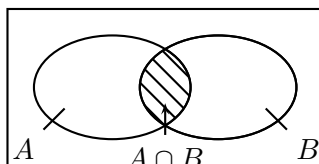
On dit que l'espérance est linéaire et que la variance est quadratique.

III Rappels de seconde sur les probabilités

Rappels :

1. Intersection de deux ensembles.

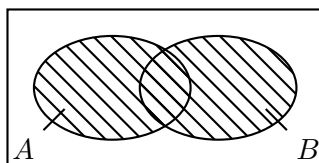
L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.

La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience qui peut produire des résultats différents si on la répète dans les mêmes conditions.

L'ensemble des résultats (ou issues) possibles est appelé l'univers et se note Ω .

Un évènement est un sous-ensemble de l'univers.

Un évènement qui ne contient qu'un seul élément est un évènement élémentaire.

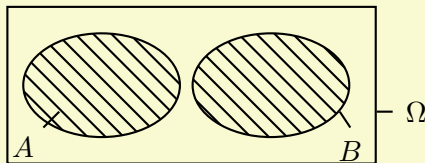
Exemple : Lancer d'un dé cubique.

L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Il est formé de 6 évènements élémentaires.

Un évènement élémentaire est : "Le dé donne 4".

Définition

Deux évènements A et B sont dits incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$ (leur intersection est vide).



Exemple :

Notons A : "le résultat est un 1", et B : "le résultat est supérieur ou égal à 3".

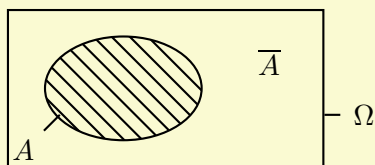
Alors, A et B sont incompatibles.

Remarque

Deux évènements élémentaires sont toujours incompatibles (disjoints).

Définition

Dans une expérience aléatoire d'univers Ω , l'évènement contraire de A , noté \bar{A} est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .



$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega, x \notin A\}$$

Exemple : Lancer d'un dé cubique.

Considérons A : "obtenir un nombre pair".

$$A = \{2; 4; 6\}.$$

L'évènement contraire de A est "ne pas obtenir un nombre pair", ou encore ici "obtenir un nombre impair" :

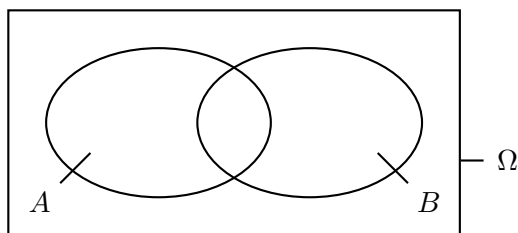
$$\bar{A} = \{1; 3; 5\}.$$

Remarque

A et \bar{A} sont toujours incompatibles.

Exercice 4

On considère deux sous-ensembles A et B d'un univers Ω .



Hachurer les ensembles suivants (un dessin par question) :

1. \bar{A}
2. \bar{B}
3. $\bar{A} \cap \bar{B}$
4. $\overline{A \cup B}$. Que remarque-t-on ?

Remarque

On a toujours :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

De plus, les symboles \cap et \cup sont distributifs l'un par rapport à l'autre :

Pour tous A , B et C

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

III.1 Définition et propriétés

Définition (Probabilité)

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un univers fini lié à une expérience aléatoire.

Cette notation signifie que l'univers est composé de n issues notés e_1, \dots, e_n .

On définit une loi de probabilité sur Ω lorsqu'à chaque issue e_i on associe un nombre positif ou nul p_i , et que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

On dit que p_i est la probabilité de e_i et on note naturellement $p_i = p(e_i)$.

Alors, la probabilité d'un évènement A quelconque est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Remarque

On a toujours $0 \leq p_i \leq 1$.

Théorème (Propriétés des probabilités)

Soient A et B des évènements d'un univers Ω .

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(\Omega) = 1$, et $P(\emptyset) = 0$.
5. Pour tous évènements A et B on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des évènements deux à deux incompatibles ($\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Remarque

Comme $P(\Omega) = 1$, et $P(\emptyset) = 0$, Ω est appelé l'évènement certain, et \emptyset l'évènement impossible.

Démonstration

1. C'est évident en considérant les évènements élémentaires qui composent A .
2. Idem.
3. $A \cup \bar{A} = \Omega$ et A et \bar{A} sont incompatibles ($A \cap \bar{A} = \emptyset$).
Donc $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + p(\bar{A})$
 $P(\Omega) = P(A) + p(\bar{A})$
 $1 = P(A) + P(\bar{A})$
 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(\Omega) = 1$ par définition d'une loi de probabilité sur Ω .
Pour $\emptyset = \bar{\Omega}$, on applique le 3. $A = \Omega$:

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

5. On peut écrire $A \cup B$ comme la réunion de deux évènements incompatibles :

$$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}) \quad *$$

Or, $(B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = B$. On a écrit B comme réunion de deux évènements disjoints.

D'où $P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$, et donc : $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

En revenant à la relation *, on obtient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. C'est une généralisation du point précédent. □

Exemple :

Dans un univers Ω , on donne deux évènements incompatibles A et B tels que $P(A) = 0.2$ et $P(B) = 0.7$.

Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$.

III.2 Lien entre statistiques et probabilités

Théorème (« loi des grands nombres », admis)

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences d'un résultat ont tendance à devenir de plus en plus proches de la probabilité de ce résultat.

Exemple :

Si l'on lance un dé équilibré un très grand nombre de fois, les fréquences d'apparition du 2 deviennent proches de $P(2) = \frac{1}{6}$.

III.3 Équiprobabilité

Définition (Équiprobabilité)

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

Exemple :

1. On lance un pièce de monnaie non faussée. L'univers est constitué de 2 évènements élémentaires : Pile et Face.

Il y a équiprobabilité : $P(Pile) = P(Face) = \frac{1}{2}$.

2. Si on lance un dé non pipé, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Remarque

S'il y a équiprobabilité sur un univers qui a n éléments, la probabilité de chaque évènement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Théorème (Équiprobabilité)

Soit Ω un univers fini associé une expérience aléatoire. Si les évènements élémentaires qui forment Ω sont équiprobables, alors la probabilité de tout évènement A est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

où $\text{card}(A)$ est le nombre d'éléments de A (cardinal).