Term STI. Correction de l'interrogation n° 3
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 5 points)

1. Soit f une fonction dérivable en un réel a.
Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
2. Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$)	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$

3. Opérations sur les dérivées :
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :
(a) soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.
(b) Si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2 (6 points)

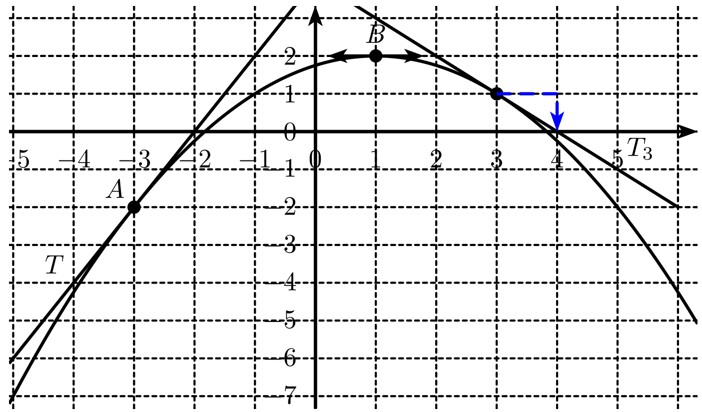
Calculer l'expression de la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 13x + 1$.
$f'(x) = -2x + 13$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x-4) \times \cos x$.
Dérivée d'un produit de deux fonctions : $(u \times v)' = u'v + uv'$.
$f'(x) = 5 \times \cos(x) + (5x-4) \times (-\sin x) = 5\cos(x) - (5x-4)\sin(x)$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(7x - \pi)$.
$f'(x) = 7\cos(7x - \pi)$
4. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{8x+1}{x-5}$.
Dérivée d'un quotient de deux fonctions : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
$f'(x) = \frac{8 \times (x-5) - (8x+1) \times 1}{(x-5)^2} = \frac{-41}{(x-5)^2}$

Exercice 3 (5 points)

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T est tangente à la courbe en A, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point B.

1. Lire graphiquement $f(-3)$ et $f(1)$.
$f(-3) = -2$ et $f(1) = 2$.
2. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(1)$. Justifier.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
$f'(-3) = 2$ et $f'(1) = 0$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses).
3. On admet que $f'(3) = -1$.
(a) Déterminer une équation de la tangente T_3 au point d'abscisse 3.
On lit $f(3) = 1$, et on sait que $f'(3) = -1$.
$y = f'(3)(x-3) + f(3) = -1(x-3) + 1 = -x + 4$.
Une équation de T_3 est $y = -x + 4$.
(b) Tracer T_3 sur le graphique ci-dessous.
Partant du point $C(3;1)$ avec une pente de -1, "on avance de 1, et on descend de 1".



Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ donnée par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
$f(2) = 2^2 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.
$f'(2) = 2 \times 2 - \frac{1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}$.
$y = f'(2)(x-2) + f(2)$.
Donc $y = \frac{15}{4}(x-2) + \frac{9}{2} = \frac{15}{4}x - \frac{15}{2} + \frac{9}{2} = \frac{15}{4}x - 3$.
La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \frac{15}{4}x - 3$.

Term STI. Correction de l'interrogation n° 3
Sujet 2

Exercice 1 (cours, 5 points)

1. Soit f une fonction dérivable en un réel a.
   Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
2. Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$)	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

3. Opérations sur les dérivées :
   Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :
   (a) La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$
   (b) Si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Exercice 2 (6 points)

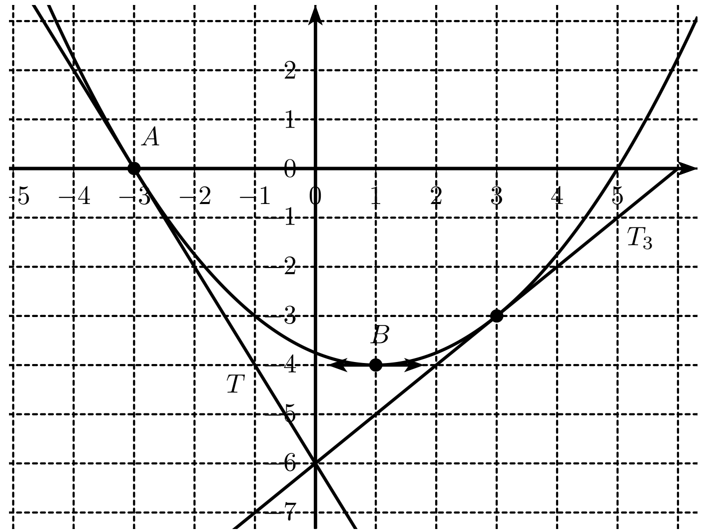
Calculer l'expression de la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 11$.
   $f'(x) = 15x^2 - 24x$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1) \times \sin x$.
   Dérivée d'un produit de deux fonctions : $(u \times v)' = u'v + uv'$.
   $f'(x) = 2\sin(x) + (2x+1) \times \cos(x)$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x + \pi)$.
   $f'(x) = 3\cos(3x+\pi)$
4. f est définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$.
   Dérivée d'un quotient de deux fonctions : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   $f'(x) = \dfrac{3(x-2) - (3x+5) \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{-11}{(x-2)^2}$.

Exercice 3 (5 points)

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T est tangente à la courbe en A, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point B.

1. Lire graphiquement $f(-3)$ et $f(1)$. Aucune justification n'est demandée.
   $f(-3) = 0$ et $f(1) = -4$.
2. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(1)$. Justifier.
   $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
   $f'(-3) = -1$ et $f'(1) = 0$ (tangente "horizontale").
3. On admet que $f'(3) = 1$.
   (a) Déterminer une équation de la tangente T_3 au point d'abscisse 3.
   $y = f'(3)(x-3) + f(3) = 1(x-3) + (-3) = x - 6$.
   Une équation de T_3 est $y = x - 6$.
   (b) Tracer T_3 sur le graphique ci-dessous.



Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ donnée par $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2.
   $f(-2) = 2 \times (-2) + \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{9}{2}$.
   $f'(-2) = 2 - \dfrac{1}{(-2)^2} = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$.
   $y = f'(-2)\,(x-(-2)) + f(-2) = \dfrac{7}{4}(x+2) - \dfrac{9}{2} = \dfrac{7}{4}x - 1$.
   Une équation de la tangente en -2 est $y = \dfrac{7}{4}x - 1$.