

1re G. Correction du dm1

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- Pour tout réel x , $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
L'affirmation est fausse : l'égalité n'est pas vérifiée pour tous les réels.
En effet, en prenant $x = 1$, le premier membre vaut 0 et le deuxième vaut -4 .
- Il existe un réel x tel que $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
L'affirmation est vraie : l'égalité est vérifiée pour $x = 0$.

Exercice 2

- Pour tout réel x , on a :
d'une part

$$\begin{aligned}(x-1)x(x+1)(x+2)+1 &= (x-1)(x+1)x(x+2)+1 \\ &= (x^2-1)(x^2+2x)+1 \\ &= x^4+2x^3-x^2-2x+1\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}(x^2+x-1)^2 &= (x^2+x-1)(x^2+x-1) \\ &= x^4+x^3-x^2+x^3+x^2-x-x^2-x+1 \\ &= x^4+2x^3-x^2-2x+1\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout réel x , on a :

$$(x-1)x(x+1)(x+2)+1 = (x^2+x-1)^2.$$

- En utilisant l'égalité précédente pour $x = 10$, on obtient :
 $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1 = (10^2 + 10 - 1)^2 = 109^2$.
On en déduit que $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1$ est le carré de 109.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.

- Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d) . Pour la courbe de f , on s'aidera d'un tableau de valeurs avec la calculatrice.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x - 4) = (x+3)(2-x)$.
D'une part,
 $f(x) - (-x - 4) = -x^2 - 2x + 2 - (-x - 4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 6$.
D'autre part, $(x+3)(2-x) = -x^2 - x + 6$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x - 4) = (x+3)(2-x)$.
- (a) Résoudre l'équation $f(x) - (-x - 4) = 0$.
 $f(x) - (-x - 4) = 0$ ssi $f(x) = -x - 4$ ssi $(x+3)(x-2) = 0$ ssi $(x+3 = 0$ ou $x - 2 = 0)$ ssi $(x = -3$ ou $x = 2)$.

Les solutions sont -3 et 2 .

- En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (d) .

On remplace x par -3 et 2 dans $y = -x - 4$ (ou dans $f(x)$).
 $-(-3) - 4 = -1$, et $-2 - 4 = -6$.

$\mathcal{C}$ et d se coupent en $A(-3; -1)$ et $B(2; -6)$.

- (a) Dresser le tableau de signe de $(x+3)(2-x)$.

Valeurs clés :

$x+3 = 0$ ssi $x = -3$, et $2-x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$		$-$	$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$
$f(x) - (-x-4)$	$-$	0	$+$	$-$

- (b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et (d) .

On en déduit que lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < -x - 4$.

Donc sur $] -\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de (d) .

Lorsque $x \in]-3; 2[$, $f(x) > -x - 4$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d) sur $] -3; 2[$.

Enfin $f(x) = -x - 4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc $\mathcal{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2 .

On pourra vérifier la cohérence de ces résultats (q3 et q4) avec le graphique.

