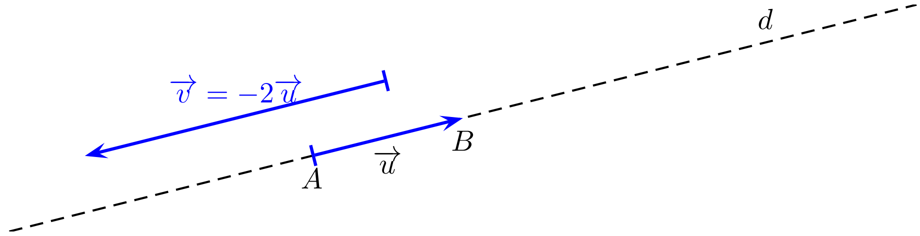
Chapitre 13 : Équations de droites. Systèmes

I Vecteurs directeurs d'une droite

Définition
Soient d une droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d s'il existe des points A et B de d tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque

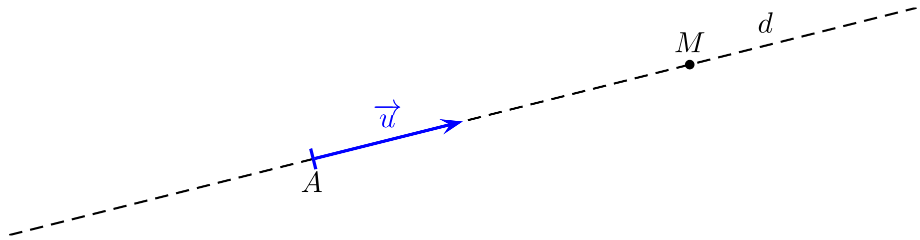
1. Si A et B sont deux points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
2. Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul qui a la même direction que la droite.
3. Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
   Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, alors les vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$, c'est-à-dire les vecteurs $k\overrightarrow{u}$ où k est un réel non nul.



Exercice 1 (corrigé)
On donne $A(-2;1)$ et $B(4;0)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 0-1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}(6;-1)$ dirige la droite (AB).

Remarque
Une droite est entièrement déterminée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.
Plus précisément, soient A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
La droite d passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} M \in d \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} \end{aligned}$$



Propriété
Soient d_1 et d_2 deux droites.
Soient $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de d_1, et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de d_2.
Alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

Remarque
Il s'ensuit que d_1 et d_2 sont sécantes ssi les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 2 (étudier si des droites sont parallèles – corrigé)
Soient d_1, d_2, d_3 des droites de vecteurs directeurs respectifs $u_1(2;-1)$, $u_2(4;6)$, et $u_3(-6;3)$.
Étudier le parallélisme des droites d_1, d_2, et d_3.
$\det(u_1;u_2) = xy' - yx' = 2\times 6 - (-1)\times 4 = 16 \neq 0$.
Donc u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, d_1 et d_2 sont sécantes.
$\det(u_1;u_3) = xy' - yx' = 2\times(-3) - (-1)\times 6 = 0$.
Donc u_1 et u_3 sont colinéaires, d_1 et d_3 sont parallèles.
Conclusion : $(d_1)//(d_3)$, et la droite d_2 coupe d_1 et d_3.

II Équations cartésiennes de droites

Dans tout ce paragraphe, on se place dans un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ du plan.

Rappel (chapitre sur les vecteurs)
Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$.
Le nombre $xy'-yx'$ est appelé le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ et se note $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

Définition
Une équation de droite est une égalité sur les coordonnées $(x;y)$ d'un point M qui caractérise l'appartenance du point M à la droite :
- lorsque les coordonnées de M vérifient l'équation, le point M est sur la droite,
- lorsque les coordonnées de M ne vérifient pas l'équation, M n'est pas sur la droite.

Théorème
On se place dans un repère du plan.
1. Toute droite d admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b, et c sont des réels, et $(a;b)\neq(0;0)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{u}(-b;a)$ est alors un vecteur directeur de la droite d.
   On dit que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite d.
2. Réciproquement, si a, b et c sont des réels et $(a;b)\neq(0;0)$, alors $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite.

Démonstration
1. Soient $A(x_A;y_A)$ un point, et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur non nul (donc $(\alpha;\beta)\neq(0;0)$).
   On note $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.
   Soit $M(x;y)$.
$$\begin{aligned}M\in\mathscr{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\text{ est colinéaire à }\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow (x-x_A)\beta-(y-y_A)\alpha=0\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\beta}_{a}x+\underbrace{(-\alpha)}_{b}y+\underbrace{(\alpha y_A-\beta x_A)}_{c}=0\end{aligned}$$
   On reconnaît la forme $ax+by+c=0$, et comme $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ on a bien $(a;b)\neq(0;0)$.
   De plus, le vecteur $\overrightarrow{u}(-b;a)$ est bien un vecteur directeur de d.
2. Réciproquement, considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$, avec $(a;b)\neq(0;0)$.
   $\mathscr{E}$ est toujours non vide :

— si $a \neq 0$, $M_0\left(-\frac{c}{a};0\right) \in \mathscr{E}$,

— sinon, $b \neq 0$, et $M_0\left(0;-\frac{c}{b}\right) \in \mathscr{E}$.

Considérons un point $M_0(x_0;y_0) \in \mathscr{E}$.

On va montrer que $\mathscr{E}$ est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ (non nul par hypothèse).

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

Comme $M_0 \in \mathscr{E}$, on a $ax_0 + by_0 + c = 0$ $(*)$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow ax+by+c=0 \\ &\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \text{ (en soustrayant la relation } *) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \text{(critère de colinéarité)} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{E}$ est la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. □

Exercice 3 (étudier si un point appartient à une droite – corrigé)

Soit d la droite d'équation $2x + y + 5 = 0$.

1. Étudier si le point $A(3;4)$ appartient à d.
   On teste les coordonnées de A dans l'équation de d.
   $2 \times 3 + 4 + 5 = 15 \neq 0$, donc $A \notin d$.
2. Étudier si le point $B(-3;1)$ appartient à d.
   $2 \times (-3) + 1 + 5 = -6 + 6 = 0$, donc $B \in d$.
3. Déterminer les coordonnées du point C de la droite d dont l'ordonnée vaut 7.
   $2x_c + 7 + 5 = 0$ ssi $2x_c = -12$ ssi $x_c = -6$.
   Le point de d d'ordonnée 7 est le point $C(-6;7)$.

Propriété (équation réduite)

L'équation d'une droite peut toujours s'écrire de l'une des deux façons suivantes, appelée équation réduite :

- $y = mx + p$ pour les droites non parallèles à (Oy).
  m est appelé le coefficient directeur (ou la pente), p est l'ordonnée à l'origine.
- $x = k$ pour les droites parallèles à (Oy).

Exercice 4 (méthode pour déterminer une équation de droite – corrigé)

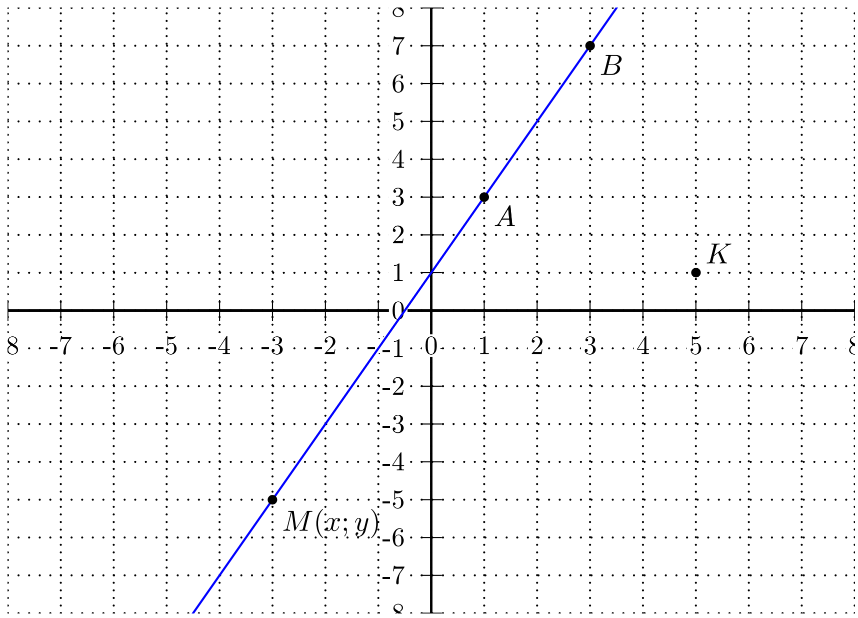
Soient $A(1;3)$ et $B(3;7)$. Déterminer une équation de la droite (AB).

1. Méthode 1 : en utilisant le théorème.
   Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite(AB).
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
   Donc, d admet une équation de la forme $4x - 2y + c = 0$.
   Comme $A(1;3) \in (AB)$, on a $4 \times 1 - 2 \times 3 + c = 0$, et donc $c = 2$.
   Une équation de la droite (AB) est $4x - 2y + 2 = 0$, ou encore $2x - y + 1 = 0$ (équivalente, on peut multiplier par un même nombre non nul les deux membres d'une équation, et l'on obtient ne équation équivalente).
   L'équation réduite de la droite (AB) est $y = 2x + 1$.
2. Méthode 2 : sans utiliser le théorème précédent.
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow (x-1)\times 4 - (y-3)\times 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 - 2y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 2y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x + 1 \end{aligned}$$

Une équation de la droite (AB) est $2x - y + 1 = 0$.
L'équation réduite de la droite (AB) est $y = 2x + 1$.



Propriété (vecteur directeur)

1. La droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
2. La droite d'équation $y = mx + p$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
3. La droite d'équation $x = k$ est dirigée par le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

1. Les droites non parallèles à (Oy) sont les courbes représentatives des fonctions affines $f(x) = mx + p$.
2. Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ne sont pas des représentations graphiques de fonctions. Elles n'ont pas de coefficient directeur (pente), ni d'ordonnée à l'origine.
3. Les droites parallèles à l'axe des abscisses ont une équation du type $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$).
   Elle représentent les fonctions constantes.
   C'est un cas particulier de droite non parallèle à (Oy).

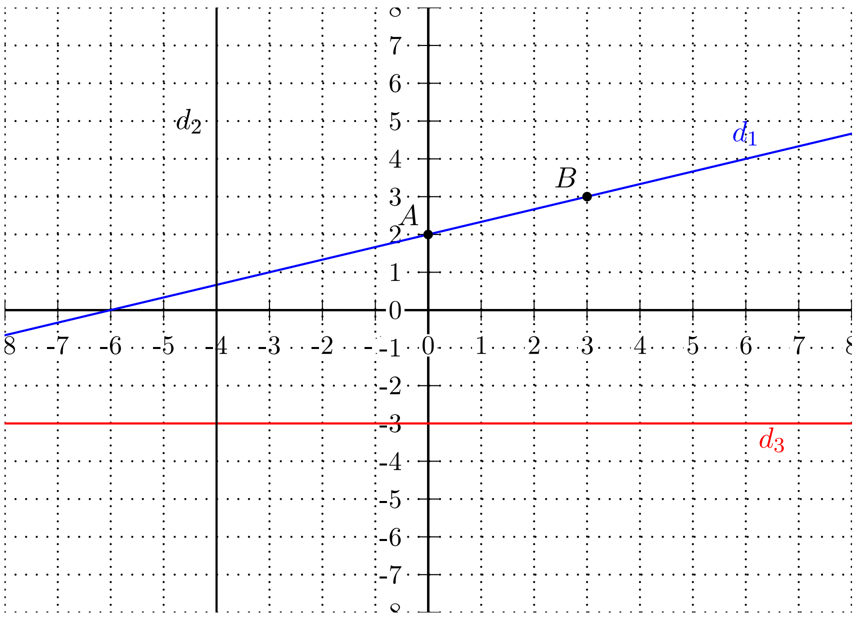
Exercice 5 (vecteur directeur et équation réduite – corrigé)

Déterminer l'équation réduite et donner un vecteur directeur des droites suivantes :

1. d_1 d'équation $x - 3y + 6 = 0$.
   d_1 est dirigée par $\overrightarrow{u_1}(3;1)$.
   Pour déterminer son équation réduite, on isole y dans l'équation.
   $x - 3y + 6 = 0$ ssi $3y = x + 6$ ssi $y = \frac{1}{3}x + 2$.
   Son équation réduite est $y = \frac{1}{3}x + 2$.
2. d_2 d'équation $6x + 24 = 0$.
   Son équation réduite et $x = -4$.
   C'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
   Elle est dirigée par $\overrightarrow{u_2}(0;1)$.
3. d_3 d'équation $2y + 6 = 0$.
   Son équation réduite est $y = -3$.
   C'est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
   Un vecteur directeur de d_3 est $u_3(1;0)$.

Exercice 6 (tracer une droite – corrigé)
Tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 précédentes.

1. d_1 a pour équation $x - 3y + 6 = 0$.
   Il suffit de déterminer deux points, en choisissant des valeurs de x.
   Par exemple, pour $x = 0$, on a $y = 2$, Donc $A(0;2) \in d_1$.
   Pour $x = 3$, on a $3y = 9$, donc $y = 3$. Donc d_1 passe aussi par le point $B(3;3)$.
2. d_2 d'équation $6x + 24 = 0$.
   d_2 a pour équation réduite $x = -4$, elle est donc parallèle à l'axe des ordonnées.
3. d_3 a pour équation $2y + 6 = 0$.
   Son équation réduite est $y = -3$.
   Donc d_3 est parallèle à l'axe des abscisses.



III Coefficient directeur et parallélisme de droites

Propriété (Calcul du coefficient directeur à partir de deux points)
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'abscisses différentes ($x_A \neq x_B$).
Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Propriété (Méthode pour déterminer l'équation d'une droite)
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$ (de sorte que la droite (AB) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées).
La droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$.

1. Calcul du coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2. Calcul de l'ordonnée à l'origine p :
   On remplace x et y dans l'équation $y = mx + p$ avec les coordonnées d'un point de la droite (AB), donc A ou B.

Exercice 7
On donne $A(-2; 3)$ et $B(4; 0)$. Déterminer une équation de la droite (AB).

Théorème

1. Deux droites parallèles à (Oy) sont parallèles entre elles.
2. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
   Alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement elles ont le même coefficient directeur.
   Autrement dit :
   Si $\mathscr{D}$ a pour équation $y = mx + p$ et $\mathscr{D}' : y = m'x + p'$ alors,

$$\mathscr{D} \ // \ \mathscr{D}' \Leftrightarrow m = m'.$$

Exercice 8
Notons $d_1 : y = 3x - 5$, $d_2 : x = 7$, $d_3 : y = -2$, $d_4 : 6x - 2y + 3 = 0$.
Donner un vecteur directeur pour chacune de ces droites.
Montrer de deux façons que $d_1 // d_4$.

IV Systèmes d'équations de droites

Exemple :

$$\begin{cases} x - y = 2 & (d_1) \\ x + 2y = 3 & (d_2) \end{cases}$$

Résoudre un tel système consiste à trouver les réels x et y qui vérifient à la fois ces deux équations de droites, ce qui revient à déterminer les coordonnées des points $M(x; y)$ qui appartiennent aux deux droites à la fois.

Théorème (nombre de solutions possibles)
Un système formé de deux équations de droites peut avoir :

- 1 solution si les deux droites sont sécantes,
- aucune solution si les deux droites sont strictement parallèles (parallèles distinctes),
- une infinité de solutions si les deux droites sont confondues.

IV.1 Méthodes de résolution

IV.1.a Méthode par substitution

Exercice 9
Résoudre le système $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

On exprime une inconnue (par exemple x en fonction de y), et on la remplace dans l'autre équation. Ici,

$$\left\{\begin{array}{r}x=y+2\\(y+2)+2y=3\end{array}\right.$$

On trouve y dans la 2e équation, puis x.

$$\left\{\begin{array}{r}x=y+2\\y=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{r}x=\dfrac{7}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Le système a une seule solution : le couple $\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

IV.1.b Méthode par combinaison linéaire

Exercice 10
Résoudre le système $\left\{\begin{array}{r}2x+3y=-1\\x-2y=-4\end{array}\right.$

On va faire disparaître une inconnue d'une équation en soustrayant les deux équations. Pour faire disparaître x, on multiplie par 2 la seconde équation de sorte que x ait le même coefficient dans les deux équations.

$$\left\{\begin{array}{rl}2x+3y=-1 & L1\\2x-4y=-8 & L2\end{array}\right.$$

On soustrait membre à membre $L1-L2$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}3y-(-4y) & = & -1-(-8)\quad L1-L2\\x & = & -4+2y\quad L2\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rcl}7y & = & 7\\x & = & -4+2y\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rcl}y & = & 1\\x & = & -2\end{array}\right.$$

Le couple solution est $(-2;1)$.