Seconde. Interrogation de mathématiques n° 9
Correction du Sujet 2

Exercice 1 (cours et application directe, 4 points)

1. Donner la définition d'une fonction f croissante sur un intervalle I.
   On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :
   $$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
2. Minimum d'une fonction. Compléter.
   Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.
   On dit que f admet un minimum en a lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$.
3. Dans un repère orthonormé du plan, soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Compléter sans justifier.
   (a) Les coordonnées du vecteur $\frac{6}{5}\overrightarrow{u}$ sont $\left(6; -\frac{6}{5}\right)$.
   (b) Les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{u} - 7\overrightarrow{v}$ sont $(-4; -9)$
   (c) La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{26}$.

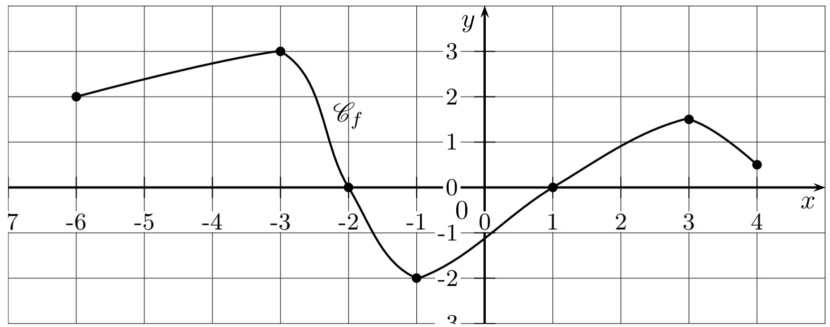
Exercice 2 (6 points)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-6; 4]$.

x	-6		-3		-1		3		4
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$1/2$

De plus, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2 et 1.

1. Donner le maximum de f sur$[-6; 4]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
   $\boxed{\text{Le maximum de } f \text{ est 3, il est atteint en } -3.}$
2. Comparer $f(-1,7)$ et $f(-1,3)$. Justifier.
   $-1,7 < -1,3$ et f est décroissante sur l'intervalle $[-3; -1]$ qui contient ces deux nombres.
   $\boxed{\text{Donc } f(-1,7) \geqslant f(-1,3).}$
3. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :
   Lorsque $x \in [-6; -1]$, $\boxed{-2 \leqslant f(x) \leqslant 3.}$
4. Donner un encadrement de $f(-4,5)$ et de $f(3,1)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?
   On a $2 \leqslant f(-4,5) \leqslant 3$, et $\frac{1}{2} \leqslant f(3,1) \leqslant \frac{3}{2}$.
   Comme les intervalles $[2; 3]$ et $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ sont disjoints, on peut comparer ces deux images :
   $f(3,1) \leqslant \frac{3}{2} < 2 \leqslant f(-4,5)$, donc $\boxed{f(3,1) < f(-4,5)}$
5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "Pour tout $x \in [-6; 4]$, $f(x) \geqslant 1$."
   $\boxed{\text{Faux.}}$
   Voici un contre-exemple : pour $x = -1$, on a $f(-1) = -2 < 1$.
   (b) "Pour tout x dans l'intervalle $[-6; 4]$, $f(x) > x$."
   $\boxed{\text{Faux.}}$
   Voici un contre-exemple : pour $x = 4$, on a $f(4) = \frac{1}{2} \leqslant 4$.
6. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec toutes les données de l'énoncé.
   On n'oublie pas que $f(-2) = f(1) = 0$.



7. Dresser le tableau de signe de f (sans justifier).

x	-6		-2		1		4
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 (3 points)

Déterminer les variations des fonctions affines suivantes, puis dresser leur tableau de signe.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4(9 + x)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3x - 36$.

Variations.

$\boxed{\text{Comme } a = -3 < 0,\ f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

Signe.

$f(x) = 0$ ssi $-3x - 36 = 0$ ssi $x = -12$.

x	$-\infty$		-12		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$a = -3 < 0$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{3-x}{5}$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{5}$.

   Variations.

   $\boxed{\text{Comme } a = -\dfrac{1}{5} < 0,\ g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

   Signe.

   $g(x) = 0$ ssi $3 - x = 0$ ssi $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$a = -\dfrac{1}{5} < 0$

Exercice 4 (2 points)

Dans un repère du plan, on donne les points $A(1;7)$, $B(3;0)$ et $C(-2;5)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 5-7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   De même, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

   Donc $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-2\times 2 \\ -2-2\times(-7) \end{pmatrix}$, $\boxed{\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}}$

2. En déduire les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

   $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M \end{pmatrix}$.

   Comme $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$, ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

   $\begin{cases} x_M - 3 = -7 \\ y_M = 12 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 12 \end{cases}$ $\boxed{\text{Ainsi, } M(-4;12).}$

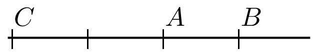
Exercice 5 (2 points)

Soient A, B, C trois points du plan tels que $3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} &= -2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2. Placer le point C sur la droite (AB).



Exercice 6 (3+1 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1;4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs de f (aucune justification n'est attendue).

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	3	6	7	6	3

2. Justifier que f n'est pas croissante sur $[-1;4]$.

   $2 < 3$ et $f(2) > f(3)$ (puisque $f(2) = 7$ et $f(3) = 6$).

   $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas croissante sur } [-1;4].}$

3. f est-elle décroissante sur $[-1;4]$? Justifier.

   0<1 et $f(0) < f(1)$ (puisque $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$).

   $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas non plus décroissante sur } [-1;4] \text{ (elle n'est pas monotone sur cet intervalle).}}$

4. Vérifier que pour tout $x \in [-1;4]$, $f(x) = -(x-2)^2 + 7$.

   En développant,

   $-(x-2)^2 + 7 = -(x^2 - 4x + 4) + 7 = -x^2 + 4x - 4 + 7 = -x^2 + 4x + 3 = f(x)$.

   $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in [-1;4],\ f(x) = -(x-2)^2 + 7}$

5. Bonus

   En déduire que f admet un maximum sur $[-1;4]$. Préciser la valeur de ce maximum et en quelle valeur il est atteint.

   Un carré est toujours positif, donc pour tout $x \in [-1;4]$, $(x-2)^2 \geqslant 0$.

   En multipliant par $-1 < 0$, $-(x-2)^2 \leqslant 0$.

   En ajoutant 7, il vient, pour tout $x \in [-1;4]$, $f(x) \leqslant 7$

   Or, on sait que $f(2) = 7$.

   Donc f admet un maximum qui est 7, atteint lorsque $x = 2$.