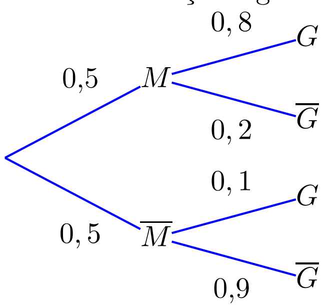
1G. Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 (n° 42 page 271)

50% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.
On constate une baisse significative de la glycémie chez 80 % des individus ayant pris le médicament, et chez 10% des individus ayant reçu le placebo.
On choisit une personne au hasard dans la population étudiée.
Calculer la probabilité que son taux de glycémie ait baissé de façon significative.

On pose M : "la personne a reçu le médicament".
G : "le taux de glycémie a baissé de façon significative".



On cherche ici $P(G)$.
M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales,
$P(G) = P(M \cap G) + P(\overline{M} \cap G) = 0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,1 = 0,45$.
La probabilité que la personne ait vu son taux de glycémie baisser significativement est de 0,45.

Exercice 2 (n° 29 page 269)

On donne $P(A) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{1}{3}$. Calculer $P(B)$.

1. On suppose que A et B sont incompatibles.
   Donc $A \cap B = \varnothing$, et $P(A \cap B) = 0$.
   Or, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   Ainsi, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + P(B) - 0$.
   Donc $P(B) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4-3}{12} = \dfrac{1}{12}$.
2. On suppose que A et B sont indépendants.
   Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
   Ainsi, la relation $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ devient :
   $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + P(B) - \dfrac{1}{4} \times P(B)$.
   Donc $\dfrac{3}{4}P(B) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$
   Enfin, $P(B) = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{9}$.

Exercice 3 (n° 31 page 269)

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées.
La probabilité que l'une au moins soit occupée est de 0,9, et la probabilité que toutes les deux soient occupées est de 0,5.
On pose A : "La première salle est occupée", et B : La deuxième salle est occupée".

1. Calculer la probabilité
   (a) que la première salle soit libre.
   On sait que $P(A) = P(B)$, que $P(A \cup B) = 0,9$,
   et $P(A \cap B) = 0,5$.
   On cherche $P(\overline{A})$.
   On a toujours $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   Ici, il vient $0,9 = 2P(A) - 0,5$, donc $P(A) = 0,7$.
   Enfin, $P(\overline{A}) = 1 - 0,7 = 0,3$.
   La probabilité que la première salle soit libre est de 0,3.

   (b) qu'une seule salle soit libre.
   Notons E cet évènement.
   $E = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, réunion disjointe.
   D'après la formule des probabilités totales, (A, $\overline{A}$ formant une partition de Ω), on a
   $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$, soit $0,7 = 0,5 + P(\overline{A} \cap B)$.
   Donc $P(\overline{A} \cap B) = 0,7 - 0,5 = 0,2$.
   De même,
   $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,5 = 0,2$.
   Finalement, $P(E) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.
   La probabilité qu'il y ait exactement une salle de libre est 0,4.
2. A et B sont-ils indépendants ?
   A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
   Or, $P(A \cap B) = 0,5$.
   Et $P(A) \times P(B) = 0,7^2 = 0,49$.
   Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.
   A et B ne sont pas indépendants.