Terminale STI. Spécialité. Correction du contrôle n° 2

Exercice 1 (4 points)

1. Mettre sous forme algébrique $Z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   $$Z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

2. On pose $Z_2 = \dfrac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{i}$.

   (a) Déterminer une écriture exponentielle de $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
   La forme exponentielle est $z = re^{i\theta}$.
   $r = |-\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{a^2+b^2}$
   $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2.$
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}.$
   $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}.$
   On en déduit un argument $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$.
   Ainsi, sous forme exponentielle, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

   (b) Justifier que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
   $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 \times i = i.$

   (c) En déduire une écriture exponentielle de Z_2.
   $$Z_2 = \frac{2e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{-i\frac{5\pi}{4}}$$
   (ou encore $Z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$).

Exercice 2 (QCM, 4 points)

Sélectionner l'unique bonne réponse.

1. On pose $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.
   Pour tout réel x, $A(x)$ est égal à :

   a. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ — $\boxed{\textbf{b. } \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}$

   c. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ — **d.** $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

   Justification :
   $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \cos\frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{6}$
   $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$

2. Soit $z = -10e^{i\frac{\pi}{3}}$. Une forme exponentielle de z est :

   a. $z = 10e^{i\frac{\pi}{3}}$ — **b.** $z = -10e^{i\frac{\pi}{3}}$

   c. $z = 10e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ — $\boxed{\textbf{d. } z = 10e^{i\frac{4\pi}{3}}}$

   $-10 < 0$, donc $-10e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une forme exponentielle.
   $-10e^{i\frac{\pi}{3}} = 10e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = 10e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})} = 10e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

3. Pour tout réel a, $\cos(2a)$ est égal à :

   a. $2\cos(a)$ — $\boxed{\textbf{b. } 2\cos^2 a - 1}$

   c. $2\sin(a)\cos(a)$ — **d.** $\cos^2 a + \sin^2 a$

   C'est une propriété du cours.

4. Une forme exponentielle de $\dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4}{5e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ est :

   a. $-5e^{i\pi}$ — **b.** $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

   $\boxed{\textbf{c. } \frac{1}{5}e^{i\frac{5\pi}{3}}}$ — **d.** $\frac{1}{5}e^{-i\frac{4\pi}{3}}$.

   Justification : $\dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4}{5e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{1}{5}e^{i\left(4\times\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{5}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Exercice 3 (2 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 12\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$.

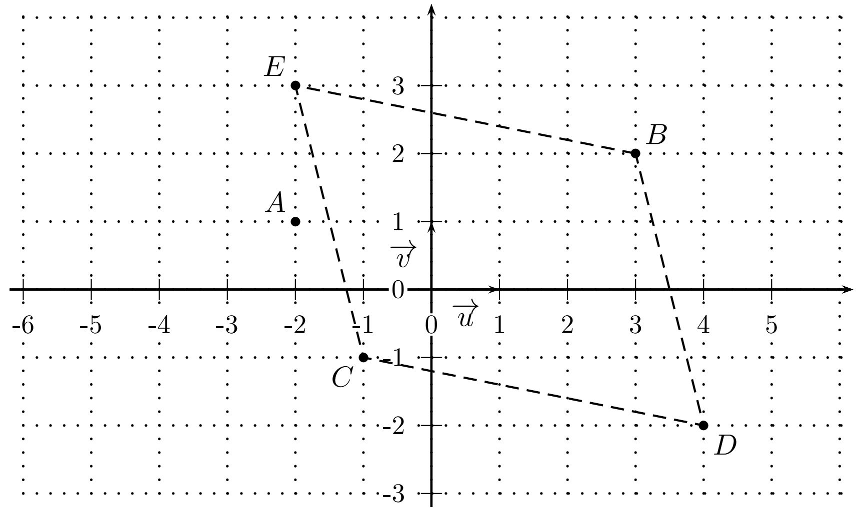
1. Compléter :
   Pour tous réels a et b, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
2. En déduire une expression de $f(t)$ en fonction de $\cos(4t)$ et de $\sin(4t)$.
   $f(t) = 12[\sin(4t)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos(4t)]$
   $f(t) = 12[\frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(4t)]$
   $f(t) = 6\sin(4t) + 6\sqrt{3}\cos(4t)$

Exercice 4 (4 points)
Compléter le tableau. Aucune justification n'est attendue.

Transformation	Écriture complexe
Translation de vecteur $\overrightarrow{w}(2+5\mathrm{i})$	$z' = z + 2 + 5\mathrm{i}$
Homothétie de centre O et de rapport 5	$z' = 5z$
Homothétie de centre O et de rapport -2	$z' = -2z$
Rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$	$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z$

Exercice 5 (6 points)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
On considère les points A d'affixe $z_A = -2+\mathrm{i}$, et B d'affixe $z_B = 3+2\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'affixe du point C, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}(1-2\mathrm{i})$.
   $z_C = z_A + 1 - 2\mathrm{i} = -2 + \mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i}$. Donc $C(-1;-1)$.
2. Déterminer l'affixe du point D, image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2.
   $z_D = -2 \times z_A = -2(-2+\mathrm{i}) = 4 - 2\mathrm{i}$. Donc $D(4;-2)$.
3. Déterminer l'affixe du point E, image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   $z_E = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times (3+2\mathrm{i})$
   Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$.
   Donc $z_E = \mathrm{i}(3+2\mathrm{i}) = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -2 + 3\mathrm{i}$. D'où $E(-2;3)$.
4. Placer les points A,B, C, D et E dans le repère ci-dessous.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $BECD$? Justifier avec du calcul en précisant la propriété utilisée.
   $BECD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$.
   $z_{\overrightarrow{BE}} = z_E - z_B = -2 + 3\mathrm{i} - (3+2\mathrm{i}) = -5 + \mathrm{i}$.
   $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -1 - \mathrm{i} - (4 - 2\mathrm{i}) = -5 + \mathrm{i}$.
   Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $BECD$ est un parallélogramme.



Exercice 6 (bonus, 2 points)
Soit B la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $B(t) = \sqrt{3}\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)$.
Démontrer que $B(t)$ peut s'écrire sous la forme $B(t) = 2\cos(2\pi t + \varphi)$ où φ est un réel à déterminer.
$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.
($A = 2$ était déjà donné dans l'énoncé).
$\cos\varphi = \frac{a}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\sin\varphi = \frac{-b}{A} = \frac{1}{2}$.
Donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$ convient.
$B(t) = 2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.