Correction du devoir maison n° 3

Exercice 1

L'enneigement de la station de sports d'hiver de L'Alpe d'Huez durant la saison de ski 2008 est indiqué par la hauteur de neige moyenne, exprimée en cm, relevée chaque semaine.

Hauteur (en cm)	50	100	120	130	140	160	180	200	240	260
Nombre de semaines	1	2	1	1	1	6	1	3	3	3

1. Combien de semaines dure la saison de ski ? Justifier.
   On calcule l'effectif total.
   $N = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 3 + 3 + 3 = 22$.
   $\boxed{\text{La saison de ski dure 22 semaines.}}$
2. Le mode d'une série est la valeur qui a le plus grand effectif. Quel est le mode de cette série ?
   $\boxed{\text{Le mode de la série est 160 car la hauteur de neige la plus fréquente est 160 cm.}}$
3. Déterminer la hauteur de neige moyenne.
   $$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{50 + 2 \times 100 + 120 + 130 + 140 + 6 \times 160 + 180 + 3 \times (200 + 240 + 260)}{22} \\ &= \frac{3880}{22} \\ &\approx 176.4\end{aligned}$$
   $\boxed{\text{La hauteur de neige moyenne est de 176.4 cm.}}$
4. Déterminer la médiane de la série.
   L'effectif est pair, $N = 22 = 2 \times 11$.
   Donc $Me = \dfrac{x_{11} + x_{12}}{2} = \dfrac{160 + 160}{2} = 160$.
   $\boxed{\text{La hauteur de neige médiane est de 160 cm.}}$
5. Pour la pratique du ski dans les meilleures conditions, la hauteur de neige doit être de 140 cm au moins.
   Peut-on affirmer que l'on a pu skier dans les meilleures conditions pendant plus de la moitié de la saison ? Justifier.
   Comme $Me = 160$, il y a eu au moins 50% des semaines où la hauteur de neige a été supérieure ou égale à 160 cm.
   $\boxed{\text{A fortiori, la hauteur de neige a été au moins de 140 cm pendant plus de la moitié de la saison.}}$
6. Déterminer le pourcentage de semaines où la hauteur de neige a été supérieure ou égale à 2 m.
   $\dfrac{3 + 3 + 3}{22} \times 100 \approx 40.9$.
   $\boxed{\text{40.9 \% des semaines ont eu un enneigement de 2 m ou plus.}}$
7. Calculer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3.
   $\dfrac{N}{4} = \dfrac{22}{4} = 5.5$.
   Q_1 est la 6e valeur : $\boxed{Q_1 = 140}$
   $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{3 \times 22}{4} = 16.5$.
   Q_3 est la 17e valeur : $\boxed{Q_3 = 240}$
8. Interpréter ces résultats.
   $\boxed{\begin{array}{l}\text{Au moins 25\% des semaines ont eu une hauteur de neige inférieure ou égale à 140 cm.} \\ \text{Au moins 75\% des semaines ont eu une hauteur de neige inférieure ou égale à 240 cm.}\end{array}}$
9. Interpréter l'intervalle interquartile $[Q_1; Q_3]$.
   $\boxed{\text{Au moins 50 \% des semaines ont eu un enneigement compris entre 140 et 240 cm.}}$

Exercice 2

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLE

n nombre entier non nul

DÉBUT

Saisir n

Traitement

Si n est pair **alors** n **prend la valeur** $\frac{n}{2}$

Sinon n **prend la valeur** $3n+1$

Afficher n

FinSi

Répéter le Traitement tant que $n \neq 1$.

FIN

On admet que l'on arrive à obtenir 1 au bout d'un nombre fini d'étapes quel que soit l'entier n.
Par exemple, si l'on entre 5, on obtient la suite d'entiers : 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (on ajustera le nombre de colonnes)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	10	5	16	8	4	2	1										
14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (on justifiera les réponses)

   (a) ≪ Plus n est grand, plus le nombre d'étapes pour arriver à 1 est grand ≫.
   C'est faux.
   Par exemple, avec $n = 5$ il faut 5 étapes, tandis qu'avec $n = 16$, il n'en faut que 4.

   (b) ≪ Si le résultat obtenu à une étape est pair, alors le résultat suivant est aussi pair ≫.
   C'est faux.
   Dans le tableau ci-dessus, on a trouvé 10 (pair), et 5 (impair) à l'étape suivante.

3. Question bonus

   (a) Montrer que pour tout entier k, on a l'égalité
   $$3(2k+1)+1 = 2(3k+2).$$
   Soit k un nombre.
   D'une part, $3(2k+1)+1 = 6k+3+1 = 6k+4$.
   D'autre part, $2(3k+2) = 6k+4$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout entier } k\text{, on a } 3(2k+1)+1 = 2(3k+2).}$

   (b) Utiliser cette égalité pour justifier l'affirmation suivante :
   ≪ Si le résultat obtenu à une étape est impair, alors le résultat suivant est pair ≫.
   Si, à une étape, le résultat est impair, alors il peut s'écrire $a = 2k+1$, k étant un entier.
   Comme ce nombre est impair, le suivant est $3a+1$.
   $3a+1 = 3(2k+1)+1 = 2(3k+2)$ (avec la question précédente).
   Donc le nombre suivant est un multiple de 2, il est pair.