Chapitre 6 : Primitives

I Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est f.
Ainsi, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive d ef sur $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{3}3x^2 = x^2 = f(x)$.
Comme $F' = f$, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème (admis)
Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exercice 1 (corrigé)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$.

1. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{5}{2} \times 2x - 1 = 5x - 1 = f(x)$.
   Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction G définie par $G(x) = \frac{5}{2}x^2 - x + 13$ est-elle une primitive de f ? Justifier.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \frac{5}{2} \times 2x - 1 + 0 = 5x - 1 = f(x)$.
   Donc G est elle aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété (admis)
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

1. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, où k est une constante.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Remarque
Dès lors qu'une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle, et deux primitives diffèrent seulement d'une constante.

Exercice 2
On reprend la fonction f de l'exercice précédent, $f(x) = 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la forme générale des primitives de la fonction f.
   On sait que la fonction F définie par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Donc les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = \frac{5}{2}x^2 - x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 3.
   On cherche k tel que $G(3) = 0$.
   Cela revient à $\frac{5}{2} \times 3^2 - 3 + k = 0$, soit $\frac{45}{2} - \frac{6}{2} + k = 0$, et $k = -\frac{39}{2}$.
   La primitive de f qui s'annule en 3 est la fonction G définie par $G(x) = \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{39}{2}$.

II Recherche de primitives

II.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$, $(a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

II.2 Opérations sur les primitives

Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle sur I, de primitives respectives F et G.

1. Une primitive de $f + g$ est $F + G$.
2. Pour toute constante $k \in \mathbb{R}$, une primitive de kf est kF.

Démonstration

1. $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
2. $(kF)' = kF' = kf$.

□

Remarque
Attention, $F \times G$ n'est pas en général une primitive de $f \times g$ car $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$.