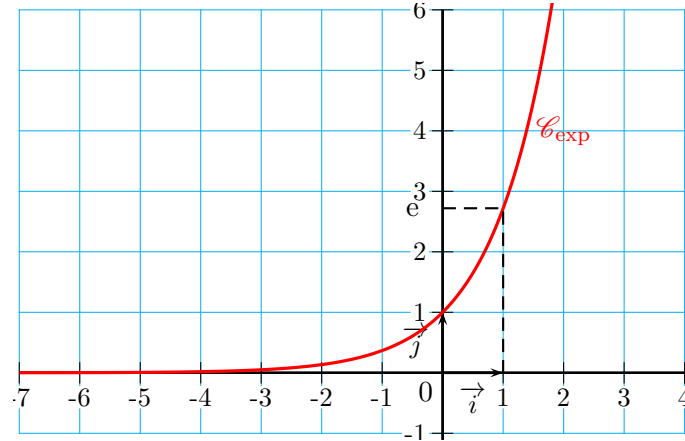


Chapitre 9 : Logarithmes

I La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'$	$+$	1	$+$
$\exp$	0	1	$+\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k > 0$, il existe un unique réel a tel que $e^a = k$. Ceci permet de définir une nouvelle fonction, la fonction logarithme népérien.

I.1 Définition

Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$ de la façon suivante : pour tout $k > 0$, $\ln k$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue a $e^a = k$.

Autre formulation :

pour tout $k > 0$, $\ln k$ est l'unique antécédent de k par la fonction exponentielle.

Exemple :

Comme $\exp(0) = 1$, alors $\ln(1) = 0$.

Comme $\exp(1) = e$, alors $\ln(e) = 1$.

Propriété

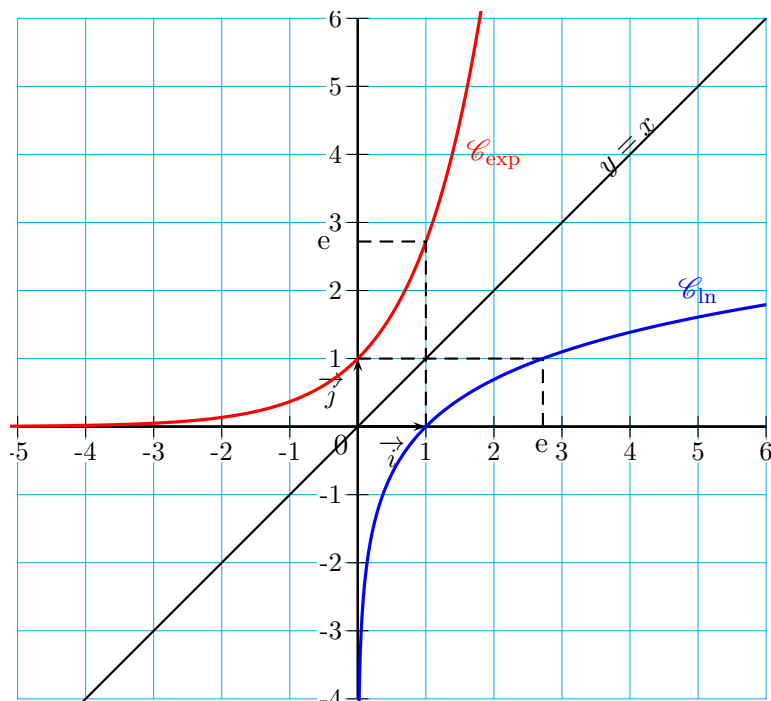
Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

Remarque

On dit que $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



I.2 Propriétés

Propriété

1. La fonction $\ln$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
4. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
5. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

6. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 - (a) $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$.
 - (b) $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$.
7. Pour tous a et b strictement positifs,
 - (a) $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.
 - (b) $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

Démonstration

1. On admet la continuité de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.
2. La propriété se déduit directement de la définition.
3. $\ln 1 = 0$ car $e^0 = 1$, et $\ln e = 1$ car $e^1 = e$

4. Soient $a > 0$ et $x > 0$, avec $x \neq a$. On forme le taux d'accroissement de $\ln$ entre a et x , et on cherche sa limite lorsque x tend vers a .

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \\ &= \frac{\ln x - \ln a}{e^{\ln x} - e^{\ln a}} \\ &= \frac{1}{\frac{e^{\ln x} - e^{\ln a}}{\ln x - \ln a}} \end{aligned}$$

Comme $\ln$ est continue, $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$.

Posons $X = \ln x$, Par définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en $\ln a$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{\ln x} - e^{\ln a}}{\ln x - \ln a} &= \lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a} \\ &= \exp'(\ln a) \\ &= e^{\ln a} \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a}$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

5. Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

6. Soit $x > 0$.

Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, $x < 1$ implique $\ln x < \ln 1 = 0$, et de même $x > 1$ implique que $\ln x > 0$.

Réciproquement, si $\ln(x) < 0$, alors $0 < x < 1$ ($x > 0$ car sinon $\ln x$ n'est pas défini).

En effet, si on avait $x \geq 1$, on obtiendrait $\ln x \leq 0$, en contradiction avec $\ln x < 0$.

De même, on montre par l'absurde que $\ln x > 0$ implique $x > 1$.

7. Ces équivalences découlent de la stricte croissance de $\ln$ sur $]0; +\infty[$. □

I.3 Relation fonctionnelle

Théorème (Règles de calcul)

Pour tous a et b strictement positifs, et pour tout entier relatif n :

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$,
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$,
4. $\ln(a^n) = n \ln a$,
5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

Démonstration

1. $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$, et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$.

Donc $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$, soit $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

2. Soit $a > 0$.
Comme $a \times \frac{1}{a} = 1$,

$$\begin{aligned}\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) &= \ln a + \ln \frac{1}{a} \\ \ln(1) &= \ln a + \ln \frac{1}{a} \\ 0 &= \ln a + \ln \frac{1}{a}\end{aligned}$$

Donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

3.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\ &= \ln a + \ln \frac{1}{b} \\ &= \ln a - \ln b\end{aligned}$$

4. **(a) Cas des entiers positifs.**

On raisonne par récurrence.

On va montrer que pour tout $n \geq 0$, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Notons $P(n)$ la propriété $\ln(a^n) = n \ln a$.

Initialisation

Pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$, et $0 \times \ln a = 0$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \geq 0$. Supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.

$$\begin{aligned}\ln(a^{k+1}) &= \ln(a^k \times a) \\ &= \ln(a^k) + \ln a \\ &= k \times \ln a + \ln a \\ &= (k+1) \ln a\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

La propriété est héréditaire.

Conclusion

Par récurrence, on a montré que pour tout $n \geq 0$ $\ln(a^n) = n \ln a$.

(b) Cas des entiers négatifs.

Soit $n < 0$, alors $-n > 0$.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ avec } -n > 0.$$

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= \ln \frac{1}{a^{-n}} \\ &= -\ln(a^{-n}) \\ &= -(-n) \ln a \\ &= n \ln a\end{aligned}$$

5. On a $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln a$.

$$\text{Donc } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a.$$

□

I.4 Limites liées à la fonction logarithme népérien

Propriété

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

2. Le tableau de variation de $\ln$ est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Démonstration

1. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Soit $A > 0$.

On doit montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $\ln x > A$.

Or, $\ln x > A$ revient à $e^{\ln x} > e^A$, soit $x > e^A$.

Donc $a = e^A$ convient.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

2. Montrons que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

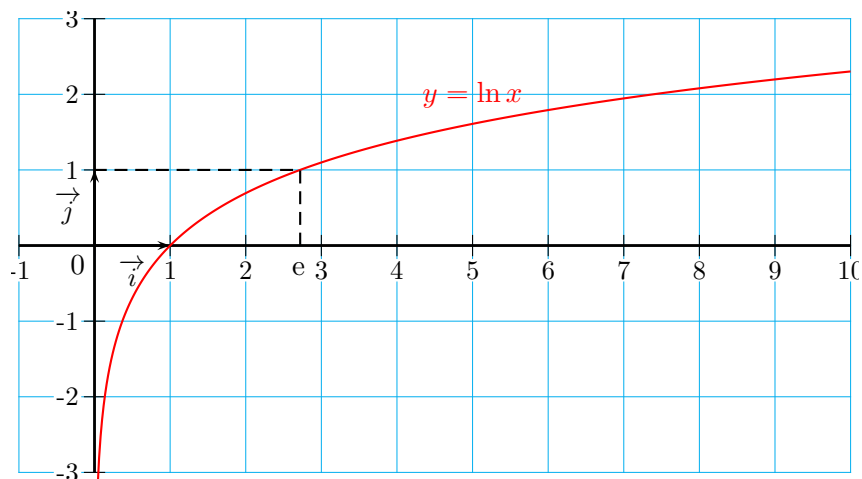
Pour tout $x > 0$, $\ln x = -1 \times (-\ln x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, et on vient de montrer que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$.

Donc par composée, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Comme, pour tout $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, les opérations sur les limites donnent le résultat :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$. □



Remarque

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_{\ln}$.

Propriété

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Démonstration

1. On remarque que $\frac{\ln(1+h)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ entre 1 et $1+h$ car $\ln 1 = 0$.

$$\text{Donc } \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

En particulier, $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Par définition du nombre dérivé, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{x} &= \frac{\ln x}{e^{\ln x}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{e^{\ln x}}{\ln x}\right)} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$.

En passant à l'inverse, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. □

Exercice 1

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

Indication : se ramener à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

II Logarithme d'une fonction

Dans ce paragraphe, u est une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur I , c'est-à-dire que u est à valeurs dans $]0; +\infty[$:

$$\text{pour tout } x \in I, u(x) > 0.$$

On étudie la fonction $\ln(u)$, notée $\ln u$.

La fonction $\ln u$ est alors bien définie sur I .

$$\ln u : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(u(x)) \end{cases}$$

Exemple :

Prenons $u(x) = 2x - 6$.

On s'intéresse donc à la fonction $f(x) = \ln(2x - 6)$.

Déterminons son domaine de définition.

Pour que $f(x)$ existe, il faut que $u(x) = 2x - 6 > 0$.

$2x - 6 = 0$ donne $x = 3$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x - 6$	$-$	0	$+$

Donc la fonction $f(x) = \ln(2x - 6)$ est définie sur $]3; +\infty[$.

Théorème (Dérivée de $\ln u$)

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I .

Alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Conséquence

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I .

Alors u et $\ln u$ ont même sens de variation sur I .

Sur l'exemple précédent, $f(x) = \ln(2x - 6)$ et $u(x) = 2x - 6$, comme u est croissante sur $]3; +\infty[$, alors f est également croissante sur $]3; +\infty[$.

Remarque (Cas particulier)

Soit u une fonction affine d'expression $u(x) = ax + b$ prenant des valeurs strictement positives sur I .

Alors, la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax + b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$f'(x) = \frac{a}{ax + b}$$

Exemple : $f(x) = \ln(-2x + 3)$.

$-2x + 3 > 0$ si $x \in]-\infty; 1,5[$.

Pour tout $x < 1,5$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-2}{-2x + 3}$.

Remarque

Bilan des formules de dérivées qui utilisent le théorème de dérivation d'une fonction composée : Rappel :

Soient $u : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I, f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x).$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si u ne s'annule pas sur I , $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$.

2. Si $u > 0$ sur I , $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
4. La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = e^u u'$.
5. Si $v > 0$ sur I , la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
6. Soient v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et a et b des réels.
Si $f(x) = v(ax + b)$, alors $f'(x) = av'(ax + b)$.

III Fonction logarithme décimal

Définition

On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée $\log$ définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque

Pour tout entier n , $\log 10^n = \frac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.

Propriété

1. $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.
2. La fonction $\log$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $\log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$.
3. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
4. Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier n ,
 - (a) $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$,
 - (b) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,
 - (c) $\log(a^n) = n \log(a)$

IV Exercices de logarithmes sur Euler

- Appliquer les propriétés de calcul sur les logarithmes :
[ressource 1241](#)
[ressource 1243](#)
[ressource 1245](#)
[ressource 269](#)
[ressource 267](#)
[ressource 1235](#)
- Équations avec des logarithmes :
[ressource 1717](#)
[ressource 272](#)
[ressource 271](#)
- Inéquations avec des logarithmes :
[ressource 2915](#)
[ressource 2917](#)
[ressource 2882](#)