1STI3. Maths spé. Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1 (48 p 84)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. x et y ont la même image sur le cercle ssi $x-y$ est un multiple de 2π.

1. $x = \dfrac{2\pi}{7}$ et $y = \dfrac{-20\pi}{7}$.
   $x - y = \dfrac{2\pi}{7} + \dfrac{20\pi}{7} = \dfrac{22}{7} \times \pi$, qui n'est pas un multiple de 2π ($\dfrac{22}{7}$ n'est pas entier). $\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$
2. $x = -\dfrac{17\pi}{4}$ et $y = \dfrac{15\pi}{4}$.
   $x - y = -\dfrac{17\pi}{4} - \dfrac{15\pi}{4} = -\dfrac{32\pi}{4} = -8\pi = -4 \times 2\pi$.
   $\boxed{x \text{ et } y \text{ ont la même image sur le cercle.}}$
3. $x = \dfrac{7\pi}{9}$ et $y = \dfrac{52\pi}{9}$.
   $x - y = \dfrac{7\pi}{9} - \dfrac{52\pi}{9} = -\dfrac{45\pi}{9} = -5\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π (car -5 est impair). $\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$

Exercice 2 (50 p 84)

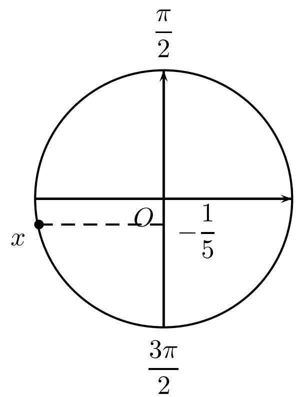
Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est :

1. $\dfrac{55\pi}{6}$.
   Notons $\alpha = -\dfrac{55\pi}{6} + k \times 2\pi$ la mesure principale.
   On cherche l'entier k tel que : $-\pi < -\dfrac{55\pi}{6} + k \times 2\pi \leqslant \pi$.
   On a $-\pi + \dfrac{55\pi}{6} < k \times 2\pi \leqslant \pi + \dfrac{55\pi}{6}$.
   donc $\dfrac{49\pi}{6} < k \times 2\pi \leqslant \dfrac{61\pi}{6}$, et $\dfrac{49}{12} < k \leqslant \dfrac{61}{12}$, soit $4,08 < k \leqslant 5,08$.
   L'entier cherché est donc $k = 5$.
   Ainsi, $\alpha = -\dfrac{55\pi}{6} + 5 \times 2\pi = \dfrac{5\pi}{6}$, qui est bien dans $]-\pi;\pi]$.
   $\boxed{\text{La mesure principale est } \dfrac{5\pi}{6}.}$
2. $-\dfrac{135\pi}{4}$.
   On cherche l'entier k tel que : $-\pi < -\dfrac{135\pi}{4} + k \times 2\pi \leqslant \pi$.
   On a $-\pi + \dfrac{135\pi}{4} < k \times 2\pi \leqslant \pi + \dfrac{135\pi}{4}$.
   donc $\dfrac{131\pi}{4} < k \times 2\pi \leqslant \dfrac{139\pi}{4}$, et $\dfrac{131}{8} < k \leqslant \dfrac{139}{8}$, soit environ $16,4 < k \leqslant 17,4$.
   L'entier cherché est donc $k = 17$.
   Ainsi, $\alpha = -\dfrac{135\pi}{4} + 17 \times 2\pi = -\dfrac{135\pi}{4} + \dfrac{4 \times 34\pi}{4} = \dfrac{-135\pi + 136\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$, qui est bien dans $]-\pi;\pi]$. $\boxed{\text{La mesure principale est } \dfrac{\pi}{4}.}$
3. $\dfrac{47\pi}{3}$.
   $\dfrac{47\pi}{3} = \dfrac{48\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 8 \times \dfrac{6\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 8 \times 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.
   $\boxed{\text{La mesure principale est } -\dfrac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi].}$
4. -1542π
   $-1542\pi = -771 \times 2\pi + 0$, et $0 \in]-\pi;\pi]$.
   $\boxed{\text{Donc la mesure principale est } 0.}$
5. $\dfrac{52\pi}{9}$.
   $\dfrac{52\pi}{9} = \dfrac{54\pi}{9} - \dfrac{2\pi}{9} = 3 \times 2\pi - \dfrac{2\pi}{9}$. $\boxed{\text{La mesure principale est } -\dfrac{2\pi}{9}.}$

Exercice 3 (61 p 84)

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = -\dfrac{1}{5}$.

1. Placer l'image de x.



2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
   Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$.
   Ainsi, $\cos x = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\dfrac{24}{25}} = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.
   Comme x appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$.
   Finalement, $\boxed{\cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}.}$