Correction du devoir maison n° 7

Exercice 1 (32 page 139)

Sur $I = [-5;-2]$, on pose $f(x) = -x + 3 - \dfrac{4}{x+1}$.

Dériver f, dresser le tableau de variation et en déduire les extrema.

$x + 1 = 0$ ssi $x = -1$, et on remarque que $-1 \notin [-5;-2]$.

f est dérivable sur $I = [-5;-2]$.

$f'(x) = -1 - 4 \times \dfrac{-1}{(x+1)^2} = -1 + \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{-(x+1)^2 + 4}{(x+1)^2}$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2}.}$$

Comme $(x+1)^2 > 0$ sur I, $f'(x)$ est du signe de son numérateur.

On étudie donc le signe du trinôme $-x^2 - 2x + 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{-2} = 1$.

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{-2} = -3$.

Le trinôme est du signe de a (négatif ici) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variation de f sur l'intervalle $I = [-5;-2]$,

x	-5		-3		-2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	8	$\nearrow$	9

Extrema de f : le minimum de f est 8, atteint en -3.
Le maximum de f est 9, et il est atteint pour $x = -5$ et pour $x = -2$.

Exercice 2 (47 p 140)

Sur $[-2;-1,1]$, on a $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 1}{x+1}$.

1. Dérivée et variations.

   Sur $[-2;-1,1]$, $x + 1 \neq 0$ car $x \neq -1$. Donc f est définie et dérivable sur cet intervalle

   $f'(x) = \dfrac{(3x^2-1)(x+1) - (x^3 - x - 1) \times 1}{(x+1)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{3x^3 + 3x^2 - x - 1 - x^3 + x + 1}{(x+1)^2}$

   $$\boxed{f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}.}$$

   $2x + 3 = 0$ ssi $x = -3/2$.

x	-2		$-3/2$		$-1,1$
x^2		$+$		$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	$5,75$	$\nearrow$	$12,31$

2. Nombre de solutions des équations

Équation	Nombre de solutions dans $[-2;-1,1]$
$f(x) = 0$	0
$f(x) = 6$	2
$f(x) = -1,1$	0
$f(x) = 5,75$	1 (et la solution est $-3/2$)
$f(x) = 12,32$	0