

Seconde. Interrogation de mathématiques n° 10
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

1. le tableau de variation de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	

2. Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs dans un repère du plan.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$.
3. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 2 (1 point)

Dans un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Compléter sans justifier.

Les coordonnées du vecteur $3\vec{u} - \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (4 points)

On se place dans un repère du plan.

1. Étudier si les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 60 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
- $xy' - yx' = \frac{1}{5} \times 60 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0$.
- On peut aussi observer que $\vec{v} = -30\vec{u}$.
- Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Donner les coordonnées de 2 vecteurs non nuls et colinéaires au vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

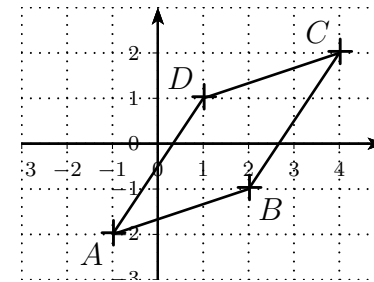
Par exemple, $-\vec{w} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $3\vec{w} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ conviennent.

3. Déterminer le réel a pour que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ 5 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$
 ssi $-11 \times 5 - 2 \times a = 0$ ssi $2a = -55$ ssi $a = -\frac{55}{2}$.

Exercice 4 (6 points)

1. Placer dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(-1; -2)$, $B(2; -1)$, et $C(4; 2)$.



2. Les points A , B , et C sont-ils alignés ? Justifier par le calcul.
- A , B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- $xy' - yx' = 3 \times 4 - 5 \times 1 = 7 \neq 0$.

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, A , B et C ne sont pas alignés.

3. Soit $D(1; 1)$. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On a vu que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Les droites (AC) et (OD) sont-elles parallèles? Justifier.

$(AC) \parallel (OD)$ ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

On sait que $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{OD} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$xy' - yx' = 5 - 4 = 1 \neq 0.$$

Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AC) et (OD) ne sont pas parallèles.

Exercice 5 (3 points)

Dans tout l'exercice, on pourra répondre sans justification.

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $x^2 = 11$

Les solutions sont $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

(b) $x^2 + 9 = 0$ $S = \emptyset$ (un carré est toujours positif ou nul).

2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de x^2 .

(a) $3 < x < 7$

$$9 < x^2 < 49$$

(b) $-4 \leq x \leq 5$

$$0 \leq x^2 \leq 25$$

(c) $-5 \leq x \leq -1$

$$1 \leq x^2 \leq 25$$

Exercice 6 (2 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$.

1. Montrer que $f(x) - g(x) = x(x - 2)$.

En développant, $x(x - 2) = x^2 - 2x = f(x) - g(x)$.

2. Dresser le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

Valeurs clés : $x = 0$ et $x = 2$. $x - 2 > 0$ ssi $x > 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x - 2)$	$+$	0	$-$	$+$

3. À quelle condition le carré d'un nombre est-il inférieur ou égal à son double?

$$x^2 \leq 2x \text{ ssi } x^2 - 2x \leq 0 \text{ ssi } x \in [0; 2].$$

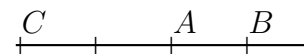
Exercice 7 (2 points)

Soient A, B, C trois points du plan tels que $3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} &= -2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

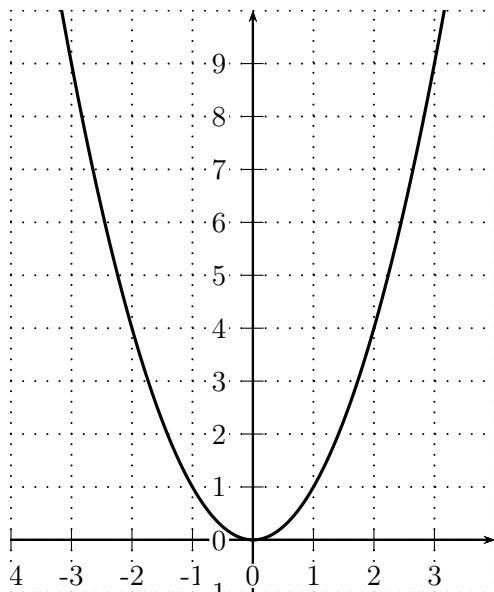
2. Placer le point C sur la droite (AB) .



Sujet 2

Exercice 8 (cours, 3 points)

- Donner sans justifier la courbe représentative de la fonction carré.



- Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs dans un repère du plan.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$
- Les points A , B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 9 (1 point)

Dans un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

deux vecteurs. Compléter sans justifier.

Les coordonnées du vecteur $3\vec{u} - \vec{v}$ sont $(7; -10)$.

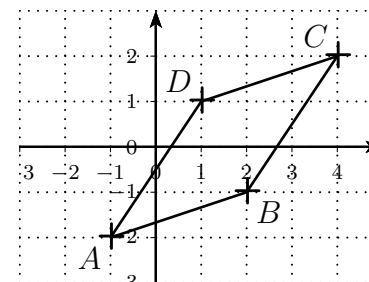
Exercice 10 (4 points)

On se place dans un repère du plan.

- Étudier si les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 60 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
 $xy' - yx' = \frac{1}{5} \times 60 - (-6) \times (-2) = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Donner les coordonnées de 2 vecteurs non nuls et colinéaires au vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
 $2\vec{w}(10; -6)$ et $-3\vec{w}(15; 9)$ conviennent.
- Déterminer le réel a pour que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ 5 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
 $xy' - yx' = 0$ ssi $-6 \times 5 - 2a = 0$ ssi $a = -15$.

Exercice 11 (6 points)

- Placer dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(-1; -2)$, $B(2; -1)$, et $C(4; 2)$.



- Les points A , B , et C sont-ils alignés? Justifier par le calcul.
 A , B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
 $xy' - yx' = 3 \times 4 - 5 \times 1 = 7 \neq 0$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, A , B et C ne sont pas alignés.

3. Soit $D(1; 1)$. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.
 $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On a vu que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Les droites (AC) et (OD) sont-elles parallèles? Justifier.
 $(AC) \parallel (OD)$ ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

On sait que $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{OD} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$xy' - yx' = 5 - 4 = 1 \neq 0.$$

Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AC) et (OD) ne sont pas parallèles.

Exercice 12 (3 points)

Dans tout l'exercice, on pourra répondre sans justification.

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $x^2 = -4$

Il n'y a pas de solution.

(b) $x^2 = 5$

$$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de x^2 .

(a) $-3 < x < -2$

$$4 < x^2 < 9$$

(b) $-3 \leq x \leq 2$

$$0 \leq x^2 \leq 9$$

(c) $5 \leq x \leq 8$

$$25 \leq x^2 \leq 64$$

Exercice 13 (2 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 3x$ et $g(x) = x^2$.

1. Montrer que $f(x) - g(x) = x(3 - x)$.

$$x(3 - x) = 3x - x^2 = f(x) - g(x)$$

2. Dresser le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

Valeurs clés : $x = 0$ et $x = 3$. $3 - x > 0$ ssi $x < 3$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x		$-$	$+$	$+$
$3 - x$		$+$	$+$	0
$x(3 - x)$		$-$	0	$+$

3. À quelle condition le carré d'un nombre est-il inférieur ou égal à son triple?

$$x^2 \leq 3x \text{ ssi } 3x - x^2 \geq 0 \text{ ssi } x \in [0; 3]$$

Exercice 14 (2 points)

Soient A , B , C trois points du plan tels que $3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} &= -2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2. Placer le point C sur la droite (AB) .

