**CRSA2 – Correction du devoir maison n° 2**

**Exercice 1 (13 page 169)**
Résoudre à l'aide d'une matrice le système. $\begin{cases} 3x+4y+2z=2 \\ 5x-2y-z=-1 \\ x-4y+3z=13 \end{cases}$

Cela équivaut au système $AX=B$ en posant les matrices :

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

et $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

Avec la calculatrice, on obtient l'inverse de $A$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/13 & 2/13 & 0 \\ 8/65 & -7/130 & -1/10 \\ 9/65 & -8/65 & 1/5 \end{pmatrix}$$

On sait que lorsque $A$ est inversible, le système admet une unique solution qui est donnée par $X=A^{-1}\times B$.

$$\text{Ainsi, } X=A^{-1}\times B=\begin{pmatrix} 1/13 & 2/13 & 0 \\ 8/65 & -7/130 & -1/10 \\ 9/65 & -8/65 & 1/5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On obtient donc $x=0$, $y=-1$ et $z=3$.

L'unique solution du système est le triplet $(0;-1;3)$.

**Exercice 2 (16 page 169)**
Soit $a$ un réel donné.

On pose $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la matrice $M(0)$ ?
   Pour $a=0$, on obtient la matrice avec 1 sur la diagonale et 0 ailleurs, c'est la matrice identité d'ordre 3.
   Donc $M(0)=I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer $M(a)\times M(b)$ pour tous réels $a$ et $b$.
   $$M(b)=\begin{pmatrix} 1 & 2b & b^2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2a+2b & b^2+2ab+a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$\text{donc } M(a)\times M(b)=\begin{pmatrix} 1 & 2(a+b) & (a+b)^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   En effet, pour le coefficient à la fin de la première ligne, $c_{1,3}=b^2+2ab+a^2=(a+b)^2$.
   Ainsi, on a, pour tous réels $a$ et $b$, $M(a)\times M(b)=M(a+b)$.
3. Déterminer $b$ pour que $M(a)\times M(b)=I_3$.
   $M(a)\times M(b)=I_3$ ssi $M(a+b)=I_3$ ssi $a+b=0$ ssi $a=-b$.
   $M(A)\times M(b)$ est la matrice identité lorsque $b=-a$