Chapitre 1 : Ensembles de nombres et calcul numérique

Un peu d'histoire

- Apparition du zéro : vers 500 ans après J.-C.
- Nombres négatifs : ils sont connus en Chine au V^{e} siècle av. J.-C., mais il faut attendre le XVI^{e} siècle pour accepter les solutions négatives d'une équation (Albert Girard).
  En France, le premier manuel qui traite des nombres négatifs date de 1886.
- Nombres décimaux : au XV^{e} siècle, Al-Kashi élabore une écriture décimale des nombres décimaux, reprise et généralisée par Simon Stévin au XVI^{e} siècle. Les nombre décimaux ne sont définitivement adoptés en France qu'en 1801 avec le système métrique.
- Nombres rationnels : 3000 ans av. J.-C., les Egyptiens utilisent des fractions avec 1 comme numérateur.
  La notation avec un trait de fraction s'impose au XVII^{e} siècle.
- Nombres irrationnels : Au VI^{e} siècle av. J.-C., l'école pythagoricienne montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- La construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ est due à Dedekind et Cantor (XIX^{e} siècle).

I Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Notations

- Pour exprimer que A est l'ensemble formé par les nombres -1, 2, 9 et 12, on utilise des accolades : $A = \{-1; 2; 9; 12\}$.
- Le nombre 2 appartient à A, on note $2 \in A$. 3 n'appartient pas à A, on note $3 \notin A$.
- Soit B l'ensemble $B = \{2; 12\}$. Comme tous les éléments de B sont dans A, on dit que B est inclus dans A et on note $B \subset A$.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 10\,000; \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs).
  $$\mathbb{Z} = \{\ldots; -10\,001; -10\,000; \ldots; -1; 0; 1; 2; \ldots; 10\,000; \ldots\}$$

Remarque
Tout nombre entier naturel est aussi un entier relatif : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

I.1 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition
Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Exemple : $-2.34 \in \mathbb{D}$ car $-2,34 = \dfrac{-234}{10^2}$.

Remarque
Tout entier relatif est un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, $a = \dfrac{a}{10^0}$. Ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Exercice 1
Montrer que les nombres suivants sont décimaux.

1. 6,1
2. $\dfrac{11}{20}$

Propriété (admise)
Un nombre est décimal ssi il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.
Les nombres décimaux sont les nombres dont le développement décimal a un nombre fini de chiffres.

I.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Définition
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs ($b \neq 0$). On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels.

Exemple : $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

Remarque
Tout nombre décimal est un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété (admise)
Tout nombre rationnel peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une fraction $\dfrac{p}{q}$ irréductible, c'est-à-dire avec $PGCD(p, q) = 1$.
Tous les nombres rationnels ont un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

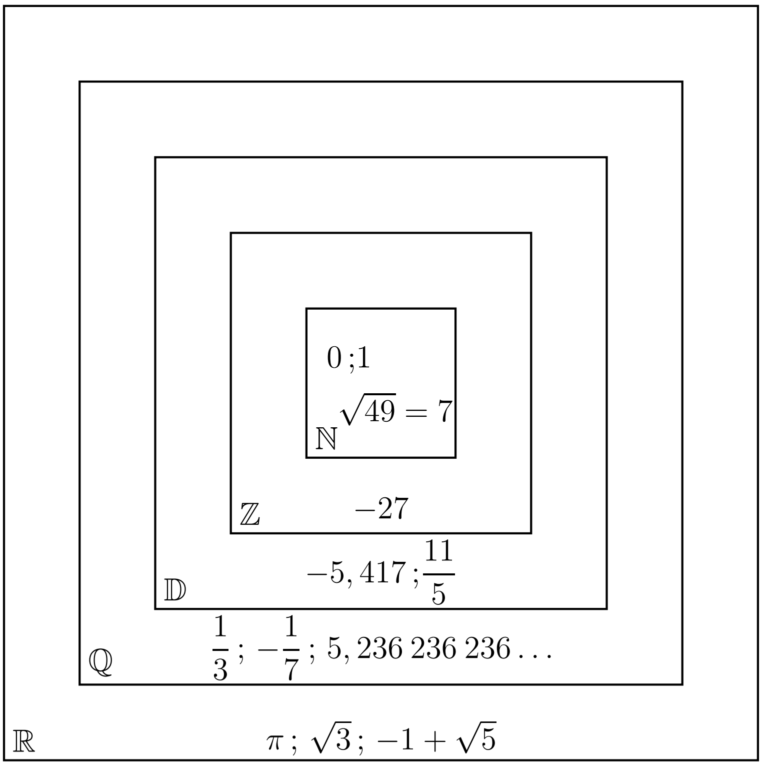
Exemple :
les nombres suivants sont rationnnels.
$\dfrac{5}{4} = 1,25 = 1,2500000\ldots$, $\dfrac{1}{3} = 0,3333\ldots$, $6 = 6,000\ldots$, $\dfrac{19}{33} = 0,57575757\ldots$.

Remarque
Parmi les nombres rationnels, il y a :
- les nombres décimaux qui ont un développement décimal fini.
- et les nombres rationnels qui ne sont pas décimaux. Ceux-ci ont un développement décimal infini mais avec une période.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (irrationnels), comme par exemple $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) ou π (périmètre d'un cercle de diamètre 1).
Les nombres irrationnels ont un développement décimal infini non périodique.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, il contient les nombres rationnels et les irrationnels.

I.2.a Synthèse

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Exercice 2
Placer sur le schéma les nombres suivants : $-\dfrac{3}{4}$; $-\sqrt{36}$; 6,21 ; $\dfrac{2}{15}$; $\dfrac{6}{25}$.

Exercice 3
Montrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Raisonner par l'absurde.

II Encadrement et approximation de réels par des nombres décimaux

Définition
Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture $a \leqslant x \leqslant b$ où a et b sont des nombres décimaux.
L'amplitude de l'encadrement est la différence $b - a$.

Exemple :
$\sqrt{3} \approx 1,732\,051$.
Un encadrement décimal de $\sqrt{3}$ d'amplitude 10^{-2} est $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

Définition
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'arrondi à 10^{-n} près du réel x est le nombre décimal à n chiffres après la virgule le plus proche de x.

Exemple :
$\pi \approx 3,141\,592\,654$.
L'arrondi de π à 10^{-2} est ....
L'arrondi de π à 10^{-3} est ....

III Puissances entières relatives

Définition
Soient a un nombre réel et n un entier naturel.
On pose $a^0 = 1$ (a non nul), et $a^1 = a$.
Pour tout $n \geqslant 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$, (lire "$a$ puissance n")
Lorsque $a \neq 0$, et $n \geqslant 1$, a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exercice 4 (calcul mental)
Calculer à l'aide de la définition :

1. $(-5)^0 =$ $\quad 1,4^1 =$ $\quad 2^5 =$
2. $(\sqrt{3})^4 =$ $\quad 5^{-1} =$ $\quad (-2)^3 =$
3. $10^{-4} =$ $\quad 2^{-3} =$ $\quad (\sqrt{2})^{-4} =$

Propriété
Soient a un nombre réel non nul et n et p des entiers relatifs.

1. $a^n \times a^p = a^{n+p}$
2. $\dfrac{a^p}{a^p} = a^{n-p}$
3. $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemple :
$3^8 \times 3^4 =$
$\dfrac{5^4}{5^6} =$
$\left(\sqrt{2}^3\right)^2 =$

Propriété
Soient a et b des nombres réels non nuls et n un entier relatif.
Alors $a^n \times b^n = (ab)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Exemple :
$\dfrac{205^{-3}}{20,5^{-3}} =$

Définition
L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leqslant a < 10$), et n est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemple : donner l'écriture scientifique des nombres suivants.
$5\,430\,000 = \ldots$ $\qquad$ $0.062\,3 = \ldots$

IV Racines carrées

Définition
Soit a un nombre réel positif ou nul.
La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est le nombre réel positif dont le carré est a.
Ainsi, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{a}^2 = a$.

Exemple :

$\sqrt{9} =$ $\qquad$ $\sqrt{0} =$ $\qquad$ $\sqrt{1} =$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{1}{4}} =$

Propriété
Soient a et b des nombres réels positifs ou nuls.

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. Si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration
D'une part, $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 =$
D'autre part, $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 =$
...
...

Exercice 5 (simplification de racines carrées)
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

1. $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{75}$, $c = \sqrt{12}$
2. $d = \sqrt{20}$, $e = \sqrt{48}$, $f = \sqrt{27}$
3. $g = \sqrt{72}$, $h = \sqrt{18}$, $i = \sqrt{24}$

Remarque
Attention, de façon générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, prenons $a = 9$ et $b = 16$.
$\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$, tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3 + 4 = 7$.

Propriété
Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration
Posons $C = \sqrt{a+b}$ et $D = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
$C^2 = \sqrt{a+b}^2 = a + b$.
Par ailleurs, $D^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.
Or, $2\sqrt{ab} > 0$.

On a donc $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > \sqrt{a+b}^2$, soit $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 > 0$.
$D^2 - C^2 > 0$, soit $(D-C)(D+C) > 0$.
Or, il est clair que $C > 0$ et $D > 0$, donc $D + C > 0$.
D'après la règles des signes, $D - C > 0$, soit $D > C$.
Ainsi, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. □

Exercice 6 (quantité conjuguée)

1. Vérifier que $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ est un nombre entier.
2. En déduire l'écriture sans radical au dénominateur de $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.
3. Écrire sans radical au dénominateur les nombres suivants :
   $B = \dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ $C = \dfrac{5}{2-\sqrt{3}}$ $D = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.