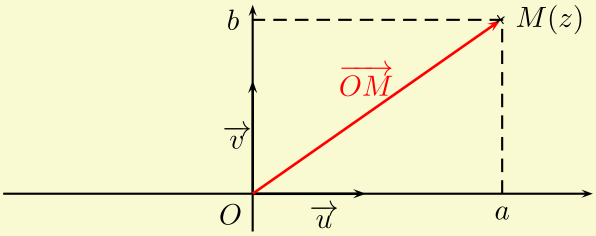
Chapitre 5 : Nombres complexes – 2e partie
Complexes et géométrie

I Rappels : représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition
À tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (avec a, b réels), on associe un unique point du plan, le point $M(a; b)$.
Réciproquement, à tout point point $M(a; b)$, on associe le le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z, et que z est l'affixe du point M (z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Propriété
1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$.
4. Si I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

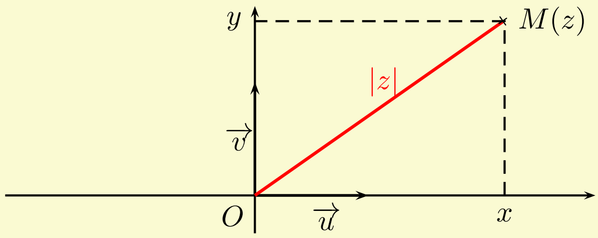
Exercice 1
Compléter.

1. Le point $A(-2; 5)$ a pour affixe $z_A = \dots$
2. Si $z_B = -4\mathrm{i}$, le point B a pour coordonnées $B(\dots; \dots)$.
3. Si $z_E = 6 - 4\mathrm{i}$ et $z_F = 2 - \mathrm{i}$, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{EF}$ est :
   $z_{\overrightarrow{EF}} = \dots$
   Cela signifie que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont ...
4. Soient $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ les vecteurs d'affixes respectives $1 + 3\mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.
   L'affixe du vecteur $3\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}$ est :
   $z_{3\overrightarrow{w}-\overrightarrow{w'}} = \dots$
5. Soient $C(2 + \mathrm{i})$ et $D(-10 - 3\mathrm{i})$ deux points données par leurs affixes respectives.
   Le milieu K du segment $[CD]$ a pour affixe :
   $z_K = \dots.$
   Cela signifie que les coordonnées de K sont ...

II Module d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Définition (module d'un nombre complexe)
Soient z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$ est la distance OM,



Remarque

1. Le module d'un nombre complexe est toujours positif ou nul : $|z| \geqslant 0$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.

Propriété
Soit z un nombre complexe sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels.
Le module de z est :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple :
Si $z = 5 - 2\mathrm{i}$, alors $|z| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$.

Remarque
On reconnaît pour le module d'un nombre complexe la même notation que la valeur absolue d'un nombre réel, entre deux barres verticales. C'est parce que le module prolonge la valeur absolue aux nombres complexes.
Si z est un nombre réel, par exemple $z = -3$, sa forme algébrique est $z = -3 + 0\mathrm{i}$.
Le module de z est $|z| = |-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$.
La valeur absolue de -3 est $|-3| = 3$.
On peut donc lire $|-3|$ "valeur absolue de -3" ou "module de -3" indifféremment.

Propriété (distance entre deux points)
Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B, $AB = |z_B - z_A|$.

Remarque
L'ordre des points n'a pas d'importance : $AB = BA = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

Exercice 2 (corrigé)
Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 5 - \mathrm{i}$ et $z_B = 1 + 4\mathrm{i}$.
Calculer la distance AB.
La distance AB est $AB = |z_B - z_A|$.
$z_B - z_A = 1 + 4\mathrm{i} - (5 - \mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i} - 5 + \mathrm{i} = -4 + 5\mathrm{i}$.
Donc $AB = |z_B - z_A| = |-4 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

Exercice 3
Soient les points E, F, G d'affixes respectives $z_E = 2 + \mathrm{i}$, $z_F = 4 + 3\mathrm{i}$ et $z_G = 6 - \mathrm{i}$.
Étudier la nature du triangle EFG.

Propriété (Propriétés du module)

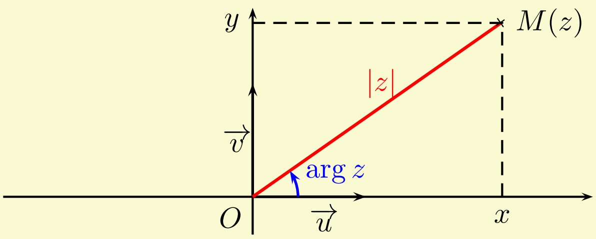
1. Produit de deux nombres complexes
   Pour tous nombres complexes z et z',
   $$|zz'| = |z| \times |z'|.$$
2. Quotient de deux nombres complexes Pour tous nombres complexes z et z', avec $z' \neq 0$,
   $$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

III Arguments d'un nombre complexe non nul

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Définition (arguments d'un nombre complexe non nul)
Soient z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.
Un argument de z, noté $\arg z$, est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$.

$$\text{Pour } z \neq 0,\ \arg z = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}),\ \text{à } 2\pi \text{ près.}$$



Remarque

1. Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments : si θ ("theta") est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$, alors les autres mesures de cet angle sont les réels $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Le nombre 0 n'a pas d'argument car l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini si $M = O$.

Exercice 4 (corrigé)
À l'aide de considérations géométriques, donner sans justifier un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5\mathrm{i}$ $\quad \arg(z_1) = \dfrac{\pi}{2}$
2. $z_2 = 3$ $\quad \arg(z_2) = 0$
3. $z_3 = -7\mathrm{i}$ $\quad \arg(z_3) = -\dfrac{\pi}{2}$
4. $z_4 = -11$ $\quad \arg(z_4) = \pi$

Propriété
Pour tous points distincts A et B, une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB})$ est :

$$(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi].$$

Démonstration
Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. $M \neq O$ car $A \neq B$.
$(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A)$.
En effet, $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. □

IV Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition (et théorème)
Soit z un nombre complexe non nul. Posons $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.
Alors,
$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$
Cette écriture est appelée une forme trigonométrique de z. On note aussi $z = [r; \theta]$.

Remarque
θ se lit "theta".
Un nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques car $\theta = \arg z$ est défini à 2π près (par contre le module est unique).

Démonstration
Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
Notons M l'image de z, et N le point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ avec le cercle trigonométrique (de rayon 1).
On a $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
Par ailleurs, $\theta = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{ON})$.
Comme N est sur le cercle trigonométrique, ses coordonnées sont $(\cos\theta; \sin(\theta)$.
Donc les coordonnées de M sont $(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Donc, en revenant aux affixes, $z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta$.
Finalement, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. □

Propriété
1. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à un multiple de 2π près.
2. Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta \quad [2\pi]$.

Propriété
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.
Alors,

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
- $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

Ceci permet de retrouver θ.

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :
- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$

Exercice 5 (corrigé)
On donne $z = 3(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}) = \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$ sous forme trigonométrique. Le mettre sous forme algébrique.
On a $r = 3$, et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
Donc $x = r\cos\theta = 3\cos\dfrac{\pi}{6} = 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
et $y = r\sin\theta = 3\sin\dfrac{\pi}{6} = 3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.
$z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

Exercice 6 (corrigé)
On donne $z = 5 - 5\mathrm{i}$ sous forme algébrique. Le mettre sous forme trigonométrique.
On a $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Notons θ un argument de z.
$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.
Donc $z = 5\sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right) = \left[5\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$.