

Terminale Générale - Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1

Étudier le signe des expressions suivantes. Justifier. On pourra dresser des tableaux de signes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -2x^2 + 8x + 42$.

C'est une expression du second degré.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times (-2) \times (42) = 400 = 20^2.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 20}{-4} = 7.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 20}{-4} = -3.$$

Le trinôme $A(x)$ prend le signe de a (ici $a = -2$) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-3	7	$+\infty$	
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $B(x) = \frac{x(x+3)}{(x-1)}$.

$x(x+3)$ est du second degré, et s'annule pour $x = 0$ et $x = -3$.

Ce trinôme est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines.

$x - 1 = 0$ ssi $x = 1$ (valeur interdite pour $B(x)$).

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$x(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	$-$	0
$B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
				$\parallel$	$+$

3. Pour tout réel x non nul, $C(x) = \frac{-2}{x^5}$.

$-2 < 0$ et $x^5 = x^4 \times x$ a le même signe que x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-2	$-$	$-$	
x^5	$-$	0	$+$
$C(x)$	$+$	$\parallel$	$-$

4. Pour tout réel x différent de 2 et 5, $D(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-5}$.

Indication : factoriser l'expression avant d'étudier le signe.

$$D(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-5} = \frac{x-5-3(x-2)}{(x-2)(x-5)} = \frac{-2x+1}{(x-2)(x-5)}.$$

Valeurs clés :

$$-2x+1=0 \text{ ssi } x = \frac{1}{2}; x-2=0 \text{ ssi } x=2; x-5=0 \text{ ssi } x=5.$$

x	$-\infty$	$1/2$	2	5	$+\infty$		
$-2x+1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
$x-5$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	
$D(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$

Exercice 2

Sur un site de partage de vidéos en ligne, la chaîne de Jimi compte 50 000 abonnés.

On admet que chaque année, 10 % de ses anciens abonnés ne maintiennent pas leur abonnement (les autres le conservent), et que dans le même temps, il arrive 15 000 nouveaux abonnés.

On note $a_0 = 50$, et pour tout $n \geq 1$, on note a_n le nombre d'abonnés (en milliers) à la chaîne de Jimi la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Justifier que pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = 0,9a_n + 15$.

a_{n+1} est le nombre d'abonnés, exprimé en milliers, de l'année

$(n + 1)$.

Il s'obtient en additionnant les anciens abonnés et les nouveaux.

$$a_n - \frac{10}{100}a_n = a_n(1 - 0,1) = 0,9a_n.$$

Les anciens abonnés qui conservent leur abonnement sont au nombre de $0,9a_n$.

Il y a 15 000 nouveaux abonnés, soit 15 milliers.

Donc pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = 0,9a_n + 15$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq 150$.

On raisonne par récurrence.

Initialisation

$a_0 = 50$, donc $a_0 \leq 150$.

Hérédité

Soit $k \geq 0$. Supposons que $a_k \leq 150$.

$$\begin{aligned} a_k &\leq 150 \\ 0,9a_k &\leq 135 \\ 0,9a_k + 15 &\leq 150 \\ a_{k+1} &\leq 150 \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion :

On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq 150$.

3. Montrer par récurrence que la suite (a_n) est croissante.

On raisonne par récurrence.

Il s'agit de montrer que pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} \geq a_n$.

Initialisation

$a_0 = 50$.

$a_1 = 0,9 \times 50 + 15 = 45 + 15 = 60$.

Donc $a_1 \geq a_0$.

Hérédité.

Soit $k \geq 0$. Supposons que $a_{k+1} \geq a_k$.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\geq a_k \\ 0,9a_{k+1} &\geq 0,9a_k \\ 0,9a_{k+1} + 15 &\geq 0,9a_k + 15 \\ a_{k+2} &\geq a_{k+1} \end{aligned}$$

Ce qui montre l'hérédité.

Conclusion :

On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} \geq a_n$.

La suite (a_n) est croissante.

4. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier n par

$$v_n = a_n - 150.$$

- (a) Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Il s'agit de montrer qu'il existe un réel q tel que pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 150 \\ &= 0,9a_n + 15 - 150 \\ &= 0,9a_n - 135 \\ &= 0,9(a_n - 150) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

- (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de a_n en fonction de n .

$v_0 = a_0 - 150 = 50 - 150 = -100$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -100 \times 0,9^n$.

Or, $v_n = a_n - 150$, donc $a_n = v_n + 150$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 150 - 100 \times 0,9^n$.