Correction du contrôle de valorisation

Exercice 1 (8 points (+2), 30 minutes)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1.(a) Quelle est la fonction dérivée de f ?
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

(b) Étudier les variations de f.
$\Delta = 144 > 0$, les racines de f' sont -1 et 3.
Le trinôme $f'(x)$ prend le signe de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	

(c) Donner le tableau de variation de f sur $[1; 19]$.

x	1		3		19
$f(x)$	-10	$\searrow$	-26	$\nearrow$	5606

(d) En déduire une encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $[1; 19]$.
Sur cet intervalle, le minimum de f est de -26 et le maximum est de 5606.
Donc pour tout $x \in [1; 19]$, $-26 \leqslant f(x) \leqslant 5606$.

2. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$. Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ces points.
$f'(x) = -9$ ssi $3x^2 - 6x = 0$ ssi $x(3x - 6) = 0$ ssi $(x = 0$ ou $x = 2)$.
$f(0) = 1$ et $f(2) = -21$.
Il y a deux points en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -9 et est donc parallèle à cette droite.
Ce sont les points $A(0; 1)$ et $B(2; -21)$.

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 1.
$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -12(x - 1) + (-10) = -12x + 2$.
La tangente $\mathcal{T}$ a pour équation $y = -12x + 2$.

4. Bonus

(a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) - (-12x + 2) = (x - 1)(x^2 - 2x + 1)$.
$f(x) - (-12x + 2) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 + 12x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
Et en développant, $(x - 1)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
Donc $f(x) - (-12x + 2) = (x - 1)(x^2 - 2x + 1)$.

(b) Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{T}$.
$f(x) - (-12x + 2) = (x - 1)(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)(x - 1)^2 = (x - 1)^3$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - (-12x + 2)$		$-$	0	$+$	

$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $[1; +\infty[$.
$\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{T}$ sur $]-\infty; 1]$.

Exercice 2 (7 points, 15 minutes)

On compte en France métropolitaine environ 9% de personnes souffrant d'une déficience auditive.

On sélectionne 52 personnes au hasard en France métropolitaine pour un sondage au sujet d'un test auditif.

Le choix des 52 individus peut être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de déficients auditifs dans la sélection.

Les résultats seront arrondis au besoin à 10^{-4} près.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, préciser ses paramètres.
   On répète 52 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,09$.
   La variable X qui compte le nombre de personnes souffrantd'une déficience auditive suit la loi binomiale de paramètres $n = 52$ et $p = 0,09$.
2. Exprimer puis calculer $P(X = 4)$ (On précisera la formule utilisée).
   $P(X = 4) = \binom{52}{4} 0,09^4 (1 - 0,09)^{48} \approx 0,1921$.
3. Calculer $P(5 \leqslant X \leqslant 14)$.
   $P(5 \leqslant X \leqslant 14) = P(X \leqslant 14) - P(X \leqslant 4) \approx 0,5076$.
4. Quelle est la probabilité pour que la sélection contienne au moins une personne souffrant de déficience auditive.
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,91^{52} \approx 0,9926$.
5. Quelle est la probabilité pour qu'il y en ait au maximum deux ?
   $P(X \leqslant 2) \approx 0,1417$.
6. Calculer puis interpréter $E(X)$.
   $E(X) = np = 52 \times 0,09 = 4,68$.
   Dans un groupe de 52 personnes, il y a en moyenne 4,68 personnes qui souffrent d'une déficience auditive.

Exercice 3 (5 points)

Démontrer que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

Indication :

On sera amené à étudier la fonction P définie sur $[0; +\infty[$ par $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$.

Notons x la longeur d'un côté du rectangle. $x > 0$ d'après le contexte.

L'autre dimension est alors $\dfrac{100}{x}$ car l'aire est 100.

Le périmètre est donc $P(x) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right) = 2x + \dfrac{200}{x}$.

La fonction P est dérivabe sur $]0; +\infty[$.

$P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2} = \dfrac{2(x10)(x+10)}{x^2}$.

Comme $x > 0$, on a $x + 10 > 0$. Et comme $x^2 > 0$ et $2 > 0$, P' a le signe de $x - 10$.

x	0		10		$+\infty$
$P'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$\Vert$	$\searrow$	40	$\nearrow$	

$P(10) = 40$.

D'après les variations, le périmètre est au minimum de 40, et ce minimum est obtenu lorsque $x = 10$ (le rectangle est alors un carré).