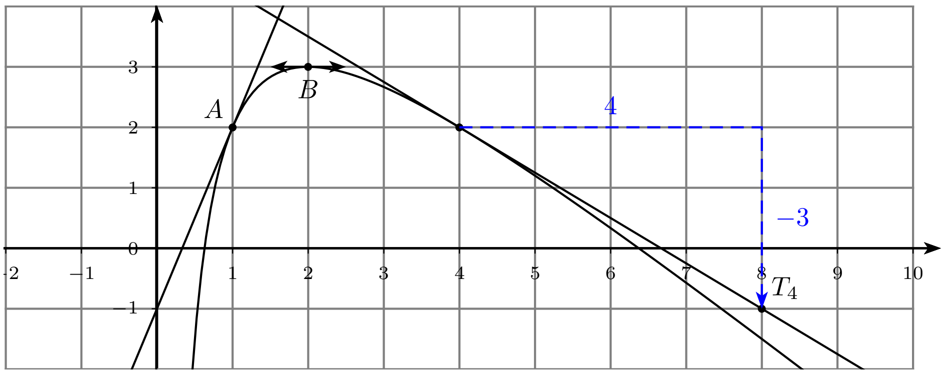
# Correction du dm8

**Exercice 1**
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de $f$ aux points $A$ et $B$.




1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.
   $\boxed{f(1) = 2 \text{ et } f(2) = 3.}$
2. Déterminer deux nombres dérivés de $f$ à l'aide du graphique. Justifier.
   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $A(1;2)$. $\boxed{\text{On lit } f'(1) = 3.}$
   $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en $B$. Comme elle est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul et donc $\boxed{f'(2) = 0.}$
3. On admet désormais que pour tout $x > 0$, $f(x) = -x + 7 - \dfrac{4}{x}$.
   (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.
   Pour tout $x > 0$,
   $f'(x) = -1 - 4 \times \dfrac{-1}{x^2} = -1 + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4-x^2}{x^2} = \dfrac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.
   (b) Vérifier que $f'(4) = -\dfrac{3}{4}$.
   $f'(4) = -1 + \dfrac{4}{4^2} = -1 + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$.
   (c) Tracer la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 4.

**Exercice 2**
Soit $f$ la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Comme toute fonction polynôme, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2x + 4.}$
2. Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 2x + 2$.

   La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
   $f'(1) = -2 + 4 = 2$, et $f(1) = -1 + 4 + 1 = 4$.

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= 2(x-1) + 4 \\ y &= 2x + 2 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C} \text{ au point d'abscisse 1 a bien pour équation } y = 2x + 2.}$
3. Pour tout nombre réel $a$, on note $T_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$.
   (a) Déterminer $a$ pour que $T_a$ soit parallèle à la droite $(d)$ d'équation
   $$y = -4x + 1.$$
   Les droites $T_a$ et $(d)$ sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur, ce qui revient à $f'(a) = -4$.
   D'où $-2a + 4 = -4$, $-2a = -8$, et $a = 4$.
   $\boxed{\text{Il y a une unique tangente parallèle à } (d) \text{, c'est la tangente au point d'abscisse 4.}}$
   (b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la tangente $T_a$ a pour équation
   $$y = (-2a + 4)x + a^2 + 1.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} y &=& f'(a)(x-a)+f(a) \\ y &=& (-2a+4)(x-a)+(-a^2+4a+1) \\ y &=& (-2a+4)x+2a^2-4a-a^2+4a+1 \\ y &=& (-2a+4)x+a^2+1 \end{array}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a$ a pour équation $y = (-2a+4)x + a^2 + 1$.

(c) En déduire qu'il existe 2 tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point $K(3;8)$.
$K(3;8) \in T_a$ ssi $8 = (-2a+4)\times 3 + a^2 + 1$, soit $a^2 - 6a + 5 = 0$.
C'est une équation du second degré avec pour inconnue $a$.
$\Delta = 36 - 4 \times 5 = 16 > 0$.
Il y a 2 solutions.
$a_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-4}{2} = 1$.
$a_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+4}{2} = 5$.
$\boxed{\text{Il y a 2 tangentes à } \mathscr{C} \text{ qui passent par le point } K(3;8)\text{, ce sont } T_1 \text{ et } T_5.}$

(d) Pour chacune de ces tangentes, donner une équation et les coordonnées du point de contact avec la courbe.
- Pour la tangente $T_1$ au point d'abscisse 1, $f(1) = -1 + 4 + 1 = 4$.
  $\boxed{\text{Le point de contact entre } \mathscr{C} \text{ et } T_1 \text{ est } A(1;4).}$
  $\boxed{\text{On a déjà vu à la question 2 que } T_1 \text{ a pour équation } y = 2x+2.}$
- Pour la tangente $T_5$ au point d'abscisse 5, $f(5) = -5^2 + 5 \times 5 + 1 = -25 + 20 + 1 = -4$.
  $\boxed{\text{Le point de contact est } B(5;-4).}$
  En remplaçant $a$ par 5 dans l'équation de $T_a$, il vient
  $y = (-2\times 5+4)x + 5^2 + 1 = -6x + 26$.
  $\boxed{T_5 \text{ a pour équation } y = -6x+26.}$

**Exercice 3**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1. Calculer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   Posons $u(x) = x$, et $v(x) = \sqrt{x}$.
   Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit de fonctions dérivables.
   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.
2. $f$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui donner son nombre dérivé en 0. Justifier.
   Soit $h > 0$.
   $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$.
   Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$.
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$
3. Vrai-Faux. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) « La tangente au point d'abscisse 1 passe par $B(3;4)$ »
   Vrai.
   $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \dfrac{3}{2}(x-1) + 1 = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
   Or, en remplaçant $x$ par 3, il vient :
   $\dfrac{3}{2} \times 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 = y_B$.
   $\boxed{\text{Donc la tangente au point d'abscisse 1 passe par } B.}$

   (b) « Il existe au moins une tangente parallèle à la droite d'équation
   $y = -2x + 5$ »
   Faux.
   La tangente est parallèle à cette droite si elle a le même coefficient directeur, $-2$.
   On résout l'équation $f'(x) = -2$, soit $\dfrac{3}{2}\sqrt{x} = -2$.
   Une racine carrée est toujours positive ou nulle, cette équation n'a pas de solution.
   $\boxed{\text{Il n'y a aucune tangente parallèle à la droite d'équation } y = -2x+5.}$