1re S. Correction du dm1

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

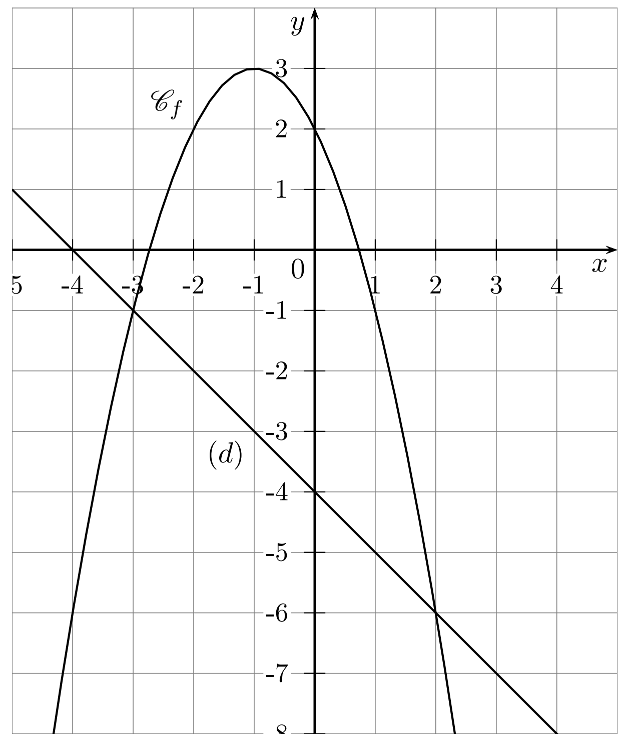
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $-(x-1)^2+3 = -(x^2+2x+1)+3 = -x^2-2x+2 = f(x)$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
2. En reconnaissant dans l'expression précédente la forme canonique d'une fonction du second degré vue en seconde, dresser le tableau de variation de f. Justifier.
   On reconnaît la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = -1$, et $\beta = 3$.
   La parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$, et a pour sommet le point $S(-1;3)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

3. Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.
   (a) Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d).
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
   D'une part, $f(x) - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 6$.
   D'autre part, $(x+3)(2-x) = -x^2 - x + 6$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
   (c) En déduire le tableau de signe de $f(x) - (-x-4)$, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (d). On vérifiera la cohérence de ce résultat avec la graphique.
   Valeurs clés :
   $x + 3 = 0$ ssi $x = -3$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(-x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que lorsque $x \in]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$, $f(x) < -x - 4$.
Donc sur $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
Lorsque $x \in]-3;2[$, $f(x) > -x - 4$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d) su $]-3;2[$.
Enfin $f(x) = -x - 4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc $\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2.
On vérifie la cohérence de ces résultats avec le graphique.



Exercice 2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout réel x, $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
   L'affirmation est fausse : l'égalité n'est pas vérifiée pour tous les réels.
   En effet, en prenant $x = 1$, le premier membre vaut 0 et le deuxième vaut -4.
2. Il existe un réel x tel que $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
   L'affirmation est vraie : l'égalité est vérifiée pour $x = 0$.