Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 (38 page 256)

Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$.

1. $(4-\mathrm{i})z+7\mathrm{i}=0$.
   $z=\dfrac{-7\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}=\dfrac{-7\mathrm{i}(4+\mathrm{i})}{(4-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}=\dfrac{-28\mathrm{i}-7\mathrm{i}^2}{4^2+1^2}=\dfrac{7-28\mathrm{i}}{17}$.
   $z=\dfrac{7}{17}-\dfrac{28}{17}\mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{La solution de l'équation est } \dfrac{7}{17}-\dfrac{28}{17}\mathrm{i}.}$
2. $\mathrm{i}z+6=0$.
   $z=\dfrac{-6}{\mathrm{i}}=\dfrac{-6\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=\dfrac{6\mathrm{i}}{0^2+1^2}=6\mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{La solution de l'équation est } 6\mathrm{i}.}$
3. $\left(\dfrac{9+7\mathrm{i}}{2}\right)z=\dfrac{1}{3}$.
   $z=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{9+7\mathrm{i}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2(9-7\mathrm{i})}{(9+7\mathrm{i})(9-7\mathrm{i})}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{18-14\mathrm{i}}{9^2+7^2}$.
   $z=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{18-14\mathrm{i}}{130}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9-7\mathrm{i}}{65}=\dfrac{9-7\mathrm{i}}{195}=\dfrac{9}{195}-\dfrac{7}{195}\mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{La solution de l'équation est } \dfrac{3}{65}-\dfrac{7}{195}\mathrm{i}.}$
4. $4+5\mathrm{i}z=3-7\mathrm{i}$.
   $5\mathrm{i}z=3-7\mathrm{i}-4=-1-7\mathrm{i}$.
   Donc $z=\dfrac{-1-7\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-7\mathrm{i})(-5\mathrm{i})}{(5\mathrm{i})(-5\mathrm{i})}=\dfrac{5\mathrm{i}+35\mathrm{i}^2}{0^2+5^2}$.
   $z=\dfrac{-35+5\mathrm{i}}{25}=\dfrac{-7+\mathrm{i}}{5}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{La solution de l'équation est } -\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}.}$

Exercice 2 (47 page 257)

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=2\mathrm{i}-3$, $z_B=1+4\mathrm{i}$, et $z_C=3-\mathrm{i}$.

Déterminons l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=1+4\mathrm{i}-(2\mathrm{i}-3)=1+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}+3=4+2\mathrm{i}$.

$z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=3-\mathrm{i}-(2\mathrm{i}-3)=3-\mathrm{i}-2\mathrm{i}+3=6-3\mathrm{i}$.

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=3-\mathrm{i}-(1+4\mathrm{i})=2-5\mathrm{i}$.

$z_{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}=z_{\overrightarrow{OA}}+z_{\overrightarrow{OB}}=z_A+z_B=2\mathrm{i}-3+1+4\mathrm{i}=-2+6\mathrm{i}$.

Exercice 3 (84 page 261)

On donne $z_A=3+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B=\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A$, et $z_C=z_A-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Donner la forme algébrique des nombres complexes z_B et z_C.

$$\begin{aligned} z_B &= \left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A \\ &= \left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(3+\mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &= \frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}^2\times\frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{4\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} \\ &= 2\mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

   $z_C=z_A-2\mathrm{i}\sqrt{3}=3+\mathrm{i}\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. Montrer que $OCAB$ est un parallélogramme.
   $OCAB$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$.
   On calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BA}$.
   $z_{\overrightarrow{OC}}=z_C=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   $z_{\overrightarrow{BA}}=z_A-z_B=3+\mathrm{i}\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Comme $z_{\overrightarrow{OC}}=z_{\overrightarrow{BA}}$, les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont égaux.
   $\boxed{\text{Comme } \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA},\ OCAB \text{ est un parallélogramme.}}$