Chapitre 18 : Produit scalaire dans l'espace

I Produit scalaire dans l'espace

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires.

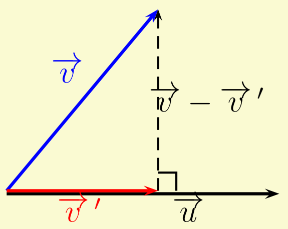
Définition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ calculé dans un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

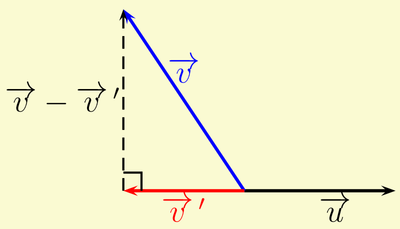
Remarque
Cette définition est indépendante du plan choisi et des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété (Rappels : expressions du produit scalaire)

1. Formule du projeté orthogonal.
   Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs non nuls, et $\vec{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$$

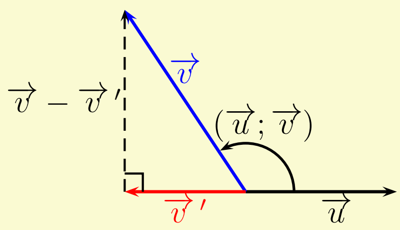




   Lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. Formule du cosinus :
   Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$



3. Expressions avec les normes :
   Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarque
Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque (cas des vecteurs colinéaires non nuls)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.

Définition
On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux s'ils dirigent des droites orthogonales.
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriété (Vecteurs orthogonaux)
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Théorème (Expression dans un repère orthonormé)
Soit $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de coordonnées $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Corollaire (Lien entre distance et produit scalaire)

1. $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^{\,2} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2$. D'où $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
2. Distance entre deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Démonstration
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. □

Remarque
L'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ se traduit de façon analytique par :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' + zz' = 0$$

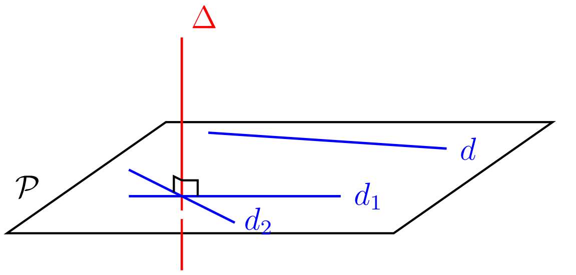
Remarque
Les propriétés du produit scalaire dans le plan vues en 1re restent valables dans l'espace.
En particulier, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, et $k \in \mathbb{R}$,

1. Symétrie :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$
2. Linéarité :
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}$$

II Applications du produit scalaire

Définition (rappel)
Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Théorème
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



Démonstration (à connaître)
On montre l'équivalence suivante :
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de plan.
La démonstration utilise le produit scalaire.

1. Implication directe :
   Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
   Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, et Δ une droite orthogonale à d_1 et à d_2.
   Considérons des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ de d_1, $\overrightarrow{u_2}$ de d_2 et $\overrightarrow{v}$ de Δ.
   Comme $\Delta \perp d_1$, on a $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$.
   De même, $\Delta \perp d_2$, d'où $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$.
   Comme d_1 et d_2 sont sécantes dans $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Autrement dit $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathcal{P}$ (famille de vecteurs directeurs).
   Soit d une droite quelconque de $\mathcal{P}$, montrons que $\Delta \perp d$.
   Considérons $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de d (donc $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$).
   Comme $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u_1}$ et u_2 sont coplanaires, $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et de $\overrightarrow{u_2}$:

   $$\text{Il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}.$$

   Alors, par linéarité du produit scalaire,

   $$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} &= \overrightarrow{v} \cdot (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \\ &= a\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} \\ &= a \times 0 + b \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.
   Comme les doites Δ et d ont des vecteurs directeurs orthogonaux, elles sont orthogonales.
   $\Delta \perp d$.
2. Réciproque :
   Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, alors elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
   Cette réciproque est évidente. □

Définition
Un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est dit normal à un plan s'il dirige une droite orthogonale à ce plan.

Propriété
Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
L'unique plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Démonstration
Soient M un point du plan P et (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
La droite (AM) est alors une droite du plan P.
Comme (d) est orthogonale à toutes les droites du plan P, $(d) \perp (AM)$.
Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
Alors M est confondu avec A ou le droite (AM) est orthogonale à la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$, donc M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. □

Propriété
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ (nécessairement non nul) admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
2. Soient a, b, c, d quatre réels, avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$.
   Alors $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

Démonstration (à connaître)

1. Soit $A(x_0;y_0;z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
   Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$.
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \end{aligned}$$
   En posant $d = -(ax_0+by_0+cz_0)$, le plan $\mathcal{P}$ est caractérisé par l'équation $ax+by+cz+d = 0$.
2. Réciproquement, on considère l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$.
   Comme a, b et c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que $a \neq 0$.
   Il est clair que le point $A\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ appartient à (E) (donc (E) est non vide).
   L'équation de (E) $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $a\left(x + \dfrac{d}{a}\right) + by + cz = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ où $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.
   Donc l'ensemble (E) est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$. □

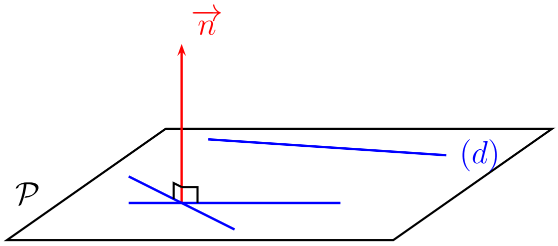
Remarque
Le plans (xOy), (yOz) et (xOz) ont respectivement pour équation $z = 0$, $x = 0$ et $y = 0$.

III Intersections de droites et de plans

III.1 Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété
Soient (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.
   Alors,
   — si $A \in \mathcal{P}$, (d) est incluse dans $\mathcal{P}$;
   — si $A \notin \mathcal{P}$, (d) et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.
2. (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux.
   En particulier, $d \perp \mathcal{P}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.



III.2 Intersection de deux plans

Propriété
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.

Remarque
Lorsque deux plans de l'espace ne sont pas parallèles, ils sont sécants et leur intersection est une droite.

Conséquence
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

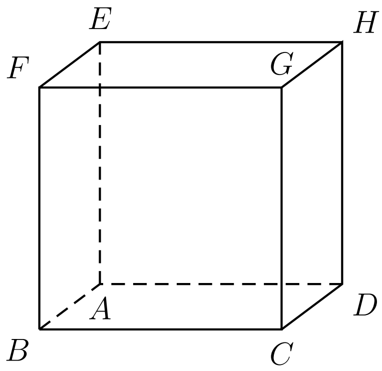
1. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ sont proportionnels.
2. Si $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ ne sont pas proportionnels, alors l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est une droite (intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$).

III.3 Plans perpendiculaires

Définition
Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Propriété
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

Exercice 1
Soit un cube $ABCDEFGH$.



1. Citer deux plans perpendiculaires. Justifier.
2. Citer deux plans qui ne sont pas perpendiculaires. Justifier.