Chapitre 7 : Vecteurs dans le plans

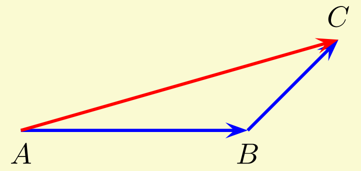
Deuxième partie

I Addition de vecteurs

Théorème (et définition)

Soient A, B et C trois points du plan.

Appliquer successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



On définit l'addition entre les vecteurs par la relation de Chasles :

$$\text{Pour tous points } A, B \text{ et } C, \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

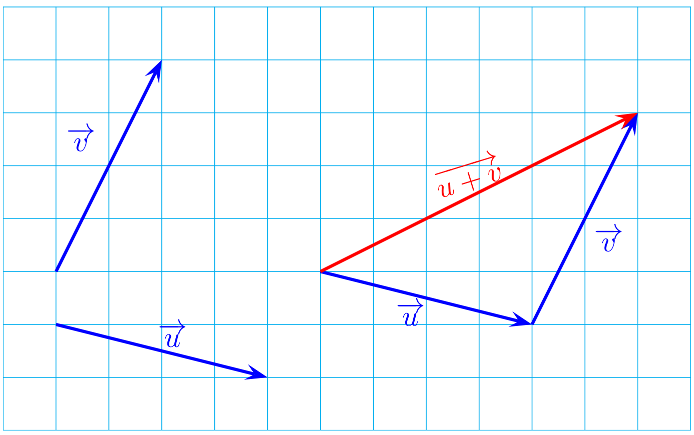
Exercice 1

Peut-on appliquer la relation de Chasles ? Si oui, le faire.

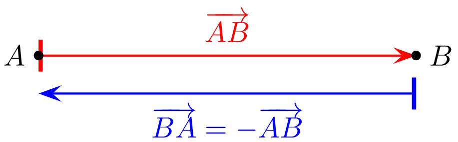
1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
3. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FE}$
5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DA}$

Remarque

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
   Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{u+v}$, on place les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bout à bout.



2. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, et on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



3. On peut caractériser le milieu d'un segment avec des vecteurs :

$$\begin{aligned} I \text{ est le milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Construire un représentant de la somme de deux vecteurs : ressource 88
2. Construire le représentant de la somme de deux vecteurs donnés d'origine ou d'extrémité fixée : ressource 111
3. Utiliser la relation de Chasles :
   ressource 1748
   ressource 1746
   ressource 1755
4. Représenter la somme de deux vecteurs : ressource 3572 et ressource 3573

II Coordonnées d'un vecteur

II.1 Définition et propriété

Définition
Soient $(O; I; J)$ un repère du plan, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ (la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ transforme le point O en M).

Alors, si $M(x; y)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont aussi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ sont les mêmes que celles du point M.

Remarque
Les coordonnées d'un vecteur traduisent le déplacement du point de départ à son extrêmité.

Par exemple, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, on avance de 2 et on descend de 1.

Exercice 3

1. Représenter un vecteur de coordonnées fixées : ressource 90
2. Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur : ressource 340
3. Représenter un vecteur de coordonnées et d'origine ou d'extrémité fixées : ressource 3570

Propriété
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors,

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si ($x = x'$ et $y = y'$).
   Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
2. Le vecteur $-\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{u+v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Déterminer les coordonnées de la somme de deux vecteurs de coordonnées fixées : ressource 486

2. Déterminer graphiquement les coordonnées de la somme de deux vecteurs : ressource 3568
3. Déterminer les coordonnées manquantes intervenant dans la somme de deux vecteurs : ressource 3574

Théorème
Dans un repère du plan, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
Il suffit de passer aux coordonnées dans cette relation pour obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. □

Exercice 5
1. Calculer les coordonnées d'un vecteur : ressource 130
2. Déterminer les coordonnées d'un des deux points définissant un vecteur de coordonnées fixées : ressource 3567
3. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une translation : ressource 484

II.2 Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition
Dans un repère du plan, soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Soit k un réel.
Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
On admet que le vecteur $k\overrightarrow{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

Exercice 6
1. Déterminer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre : ressource 487
2. Représenter le vecteur produit d'un vecteur donné par un nombre donné : ressource 89
3. Représenter le vecteur d'origine ou d'extrémité fixée produit d'un vecteur donné par un nombre donné : ressource 3571

Propriété (règles de calcul)
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et les réels k et k', on a :
1. $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$,
2. $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$,
3. $(k \times k')\overrightarrow{u} = k(k'\overrightarrow{u})$,
4. $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Remarque
On notera que les règles de calcul sont les mêmes que pour la multiplication et l'addition avec les nombres réels.

Définition (et propriété)
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB, notée aussi $||\overrightarrow{AB}||$.
Pour un vecteur $\overrightarrow{u}$, on note sa norme $||\overrightarrow{u}||$.
Dans un repère ORTHONORMÉ, on a :

1. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exercice 7
Calculer la norme d'un vecteur de coordonnées fixées dans un repère orthonormé : ressource 627

III Colinéarité de vecteurs. Applications

Définition
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls (tous les deux). On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
On considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

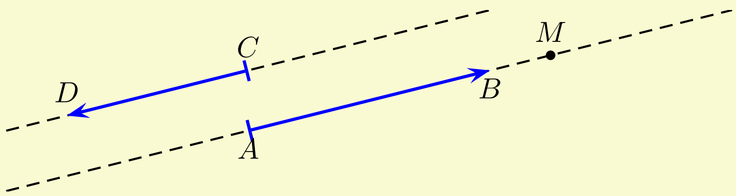
Remarque
Deux vecteurs colinéaires (non nuls) ont leurs coordonnées proportionnelles.

Exercice 8

1. Déterminer graphiquement les vecteurs colinéaires à un vecteur donné : ressource 122
2. Traduire la colinéarité de deux vecteurs de coordonnées fixées par une relation vectorielle : ressource 115

Propriété (Applications)

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



2. les points A, B et M sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exercice 9
1) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB})$. Montrer que A, B et C sont alignés.

2) A, B, C et D sont 4 points du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(5\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CB})$. Montrer que $(AB)//(CD)$.

Théorème (Expression analytique de la colinéarité)
Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
Le nombre $x'y - x'y$ est appelé le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.

Démonstration

1. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires. Il existe alors un réel k tel $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
   Alors, $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$.
   On a montré que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.
2. Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$ $(*)$.
   Alors, $xy' = yx'$.
   Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$. On peut donc supposer que $\overrightarrow{u}$ est non nul. Cela signifie que l'une de ses coordonnées $(x;y)$ est non nulle. Par exemple, supposons que ça soit x : $x \neq 0$.
   La relation $(*)$ peut alors s'écrire $y' = \dfrac{x'}{x}y$. En posant $k = \dfrac{x'}{x}$, on a donc $y' = ky$, et on a également $x' = kx$.
   Ainsi, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Donc si $xy' - yx' = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

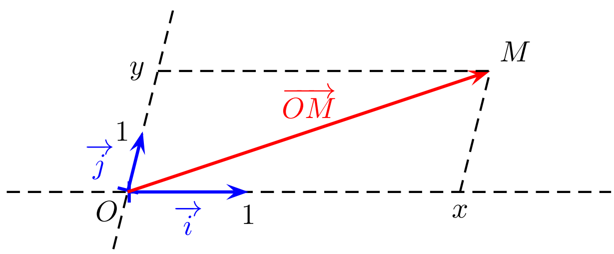
Conclusion : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. □

Exercice 10

Déterminer l'abscisse ou l'ordonnée d'un vecteur colinéaire à un vecteur de coordonnées fixées : ressource 116

Définition (nouvelle définition d'un repère du plan)
On définit un repère du plan par la donnée d'un triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ où O est un point, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls).
Alors, les coordonnées d'un point M sont l'unique couple $(x;y)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.$$



Exercice 11

1. Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle (1) : ressource 129
2. Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle (2) : ressource 125

IV Exercices

Exercice 12
Construction de point. Relation de Chasles.
Soient A, B et C trois points distincts du plan.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.
3. Placer $\overrightarrow{F}$ défini par $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$
4. Placer G tel que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AC}$.
5. Placer H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 13
Soient ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure avec $AB = 45$ mm, $BC = 60$ mm, et $AC = 75$ mm. Construire le point M.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Placer N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (laisser apparents les traits de construction).
4. Démontrer que les points A, M, et N sont alignés.

Exercice 14 (Vecteurs. Colinéarité)
Soit ABC un triangle. Les points D, E, et F sont définis par :
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que D, E, et F sont alignés.

Exercice 15
$ABCD$ est parallélogramme. On définit les points P et Q par :
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et Q est le symétrique du milieu de $[AB]$ par rapport à A.

1. Exprimer $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, pour constater qu'ils sont colinéaires.
2. Montrer que P, Q, et C sont alignés.

Exercice 16
Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire sur une figure les points E et F définis respectivement par les égalités :
$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}.$$
2. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

Exercice 17
ABC est un triangle. Les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DB}$, puis le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que B est le milieu de $[DE]$.

Exercice 18
Les points A, B et C sont tels que $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$.
Montrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 19
Dans chaque cas montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. $3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD})$
3. $2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

Exercice 20

1. Placer dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points :
$$A(-2;2),\ B(1;-4),\ C(2;6) \text{ et } D(3;4).$$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. En déduire qu'ils sont colinéaires.
3. Le quadrilatère $ABDC$ est-il un parallélogramme ? Justifiez votre réponse.
4. E est le point de coordonnées $(4;8)$. E appartient-il à la droite (AC) ?
(On pourra considérer les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EC}$).
5. Étudier de même si E appartient à la droite (BD).
6. Déterminer les coordonnées des points I et K milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que E, I et K sont alignés.

Exercice 21
ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
Les points D et E sont définis par $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
M est le milieu de $[DE]$.
On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1. Donner sans démonstration les coordonnées des points A, B et C, et déterminer les coordonnées des points D, E et M.
2. Montrer que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ADE sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$.
On rappelle que le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers du sommet.
3. On note H le point de coordonnées $\left(\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
Montrer que H appartient à (BC).
4. Montrer que le triangle MBH est rectangle en H.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (AD) et (EG).