Chapitre 9 : Produit scalaire dans le plan

Rappel :
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $||\overrightarrow{AB}||$, est la distance AB.

I Définition

Définition (formule du cosinus)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (lire « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ») est le nombre réel défini par :
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
- Sinon, en considérant des points A, B, C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, on a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

Remarque
Le produit scalaire est indépendant des représentants choisis pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on peut donc choisir des vecteurs de même origine.
La mesure d'un angle géométrique $\overrightarrow{BAC}$ est toujours dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Exercice 1
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 7$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{5\pi}{6}$.

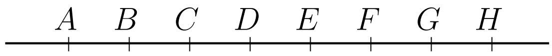
Remarque
1. D'après la définition, le produit scalaire est symétrique : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
2. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{u}||^2$.

Exercice 2
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
2. ABC est un triangle rectangle isocèle en A, avec $AB = AC = 2$ cm.

Remarque (vecteurs colinéaires)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.

Exercice 3
Les points A, B, C, D, E, F, G, H sont placés régulièrement sur une droite. On donne $AB = 1$.



Déterminer les produits scalaires suivants. Justifier.

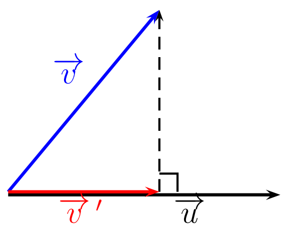
1. $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CG} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

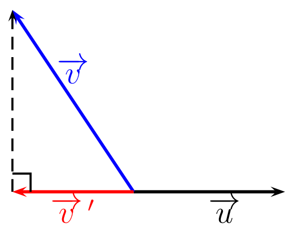
Remarque
Le produit $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ est parfois noté $\overrightarrow{u}^{\,2}$. On a donc $\overrightarrow{u}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Propriété (formule du projeté orthogonal, admise)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls, et $\overrightarrow{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$. Alors,

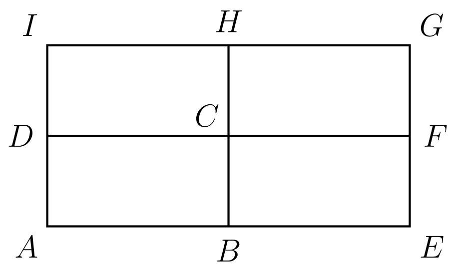
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}'$$

Lorsque $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul, on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.



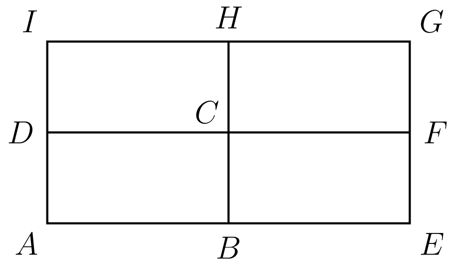


Exercice 4
Compléter avec un vecteur.



1. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AG}$ sur la droite (AB) est ...
2. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{FH}$ sur la droite (AB) est ...
3. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{ED}$ sur la droite (AB) est ...
4. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{DH}$ sur la droite (AD) est ...
5. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CF}$ sur la droite (AD) est ...
6. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{BG}$ sur la droite (AD) est ...

Exercice 5
Dans la figure suivante, on donne $AB = BE = 6$, et $AD = DI = 3$.
Calculer les produits scalaires à l'aide du projeté orthogonal.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} =$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH} =$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} =$
4. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DH} =$
5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CF} =$
6. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} =$

II Autres expressions du produit scalaire

II.1 Expression en repère orthonormé

Théorème (Expression dans un repère orthonormé)
Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de coordonnées $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Conséquence (Lien entre distance et produit scalaire)

1. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$. D'où
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
2. Distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$:
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
On retrouve la formule de la distance entre deux points vue en seconde.
$$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice 6
Dans un repère orthonormé, on donne les points $E(1; -4)$, $F(5; 3)$, et $G(-2; -5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -19$.
2. Calculer EF et EG.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{FEG})$, puis la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ arrondie à un degré près.

II.2 Expressions avec les normes

Théorème (Expressions à l'aide des normes)
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

III Propriétés du produit scalaire

Propriété
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ des vecteurs quelconques, et k un nombre réel.

1. Symétrie.
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$
2. Linéarité (et même bilinéarité avec la symétrie).
   - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.
   - $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Ces deux derniers points traduisent la bilinéarité du produit scalaire.
On notera l'analogie avec les règles de calcul sur le produit des nombres réels.

Définition (Vecteurs orthogonaux)
Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
On peut noter $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ (même symbole que pour des droites perpendiculaires).
Le vecteur nul est considéré orthogonal à tout vecteur.

Propriété
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Remarque
L'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ se traduit de façon analytique par :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0$$

Propriété (Identités remarquables)
1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Remarque
On reconnaît dans les deux premières identités les expressions du produit scalaire avec les normes, il suffit d'isoler $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour s'en convaincre.