Correction de l'interrogation de matématiques n° 7

Exercice 1 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 90$.

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = 0,9 \times 1000 + 90 = 990$.
   $u_2 = 0,9 \times 990 + 90 = 981$.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 900$
   (a) Calculer V_0 et V_1.
   $V_0 = u_0 - 900 = 100$.
   $V_1 = u_1 - 900 = 90$.
   (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0,9u_n + 90 - 900 \\ &= 0,9u_n - 810 \\ &= 0,9(V_n + 900) - 810 \\ &= 0,9V_n + 810 - 810 \\ &= 0,9V_n \end{aligned}$$

   Donc (V_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme $V_0 = 100$.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n.
   $V_n = V_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - 900$, soit $u_n = V_n + 900$.
   Donc $u_n = 100 \times 0,9^n + 900$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.
   Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim 0,9^n = 0$.
   Donc, par opérations, $\lim V_n = 0$ et $\lim u_n = 900$.
5. Soit $n \geqslant 0$.
   Déteminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(100 \times 0,9^k + 900) \\ &= (\sum_{k=0}^{n} 100 \times 0,9^k) + \sum_{k=0}^{n} 900 \\ &= 100 \times \frac{1 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9} + 900 \times (n+1) \\ &= 1000(1 - 0,9^{n+1}) + 900 \times (n+1) \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points)

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros.
Le 1^er^ janvier 2015 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le mois précédent. On note $u_1 = 30$, et pour tout $n \geqslant 1$, u_n le montant déposé le n^{e} mois à partir de décembre 2014.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 12$.
   Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 12.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r = 30 + (n-1) \times 12$.
2. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
   $u_{12} = 30 + 11 \times 12 = 162$.
   Le 1er décembre 2015, il dépose la somme de 162 euros.
3. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^{e} mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2015.

(a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} C_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} \\ &= \frac{[30 + 30 + (n-1) \times 12] \times n}{2} \\ &= \frac{(48 + 12n)n}{2} \\ &= (24 + 6n)n \\ &= 6n^2 + 24n \end{aligned}$$

(b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.
On cherche le plus petit entier n tel que $C_n \geqslant 1500$.
On résout l'inéquation $6x^2 + 24x - 1500 \geqslant 0$.
En simplifiant par 6, $x^2 + 4x - 250 \geqslant 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 1016$.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \approx -17,93$.
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 13,93$.
Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + 4x - 250$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le plus petit entier n pour lequel $6n^2 + 24n \geqslant 1500$ est donc $n = 14$.
Le mois d'indice 14 est le mois de février 2016.
Il pourra acheter la guitare en février 2016.

Exercice 3 (6 points)
Dans le métro, il y a 9 % des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station Alesia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes qui fraudent sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale. On arrondira les probabilités à 10^{-4}

1. Sans justifier, donner les paramètres de cette loi.
   X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(200; 0,09)$.
2. Exprimer et puis calculer $P(X = 21)$.
   $P(X = 21) = \binom{200}{21} 0,09^{21} 0,91^{200-21} \approx 0,0705$.
3. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
   $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 9) \approx 0,7263$.
4. Quelle est la probabilité de signaler au moins 15 fraudeurs ?
   $P(X \geqslant 15) 1 - P(X \leqslant 14) \approx 0,8042$.
   La probabilité de signaler au moins 15 fraudeurs est d'environ 0,8042.
5. En moyenne, combien de personnes seront signalées en fraude ?
   $E(X) = np = 200 \times 0,09 = 18$.
   En moyenne, on signale 18 fraudeurs par jour.
6. Si le prix du ticket est de 1,70 euros, quel doit être le montant de l'amende pour que l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent à cause de la fraude, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station.
   $5000 \times 0,09 = 450$.
   Il y a en moyenne 450 fraudeurs par jour à cette station.
   $450 \times 1,7 = 765$.
   Comme le prix d'un billet et de 1,7 euro, le manque à gagner pour la compagnie est de 765 euros.
   D'après la question précédente, en controlant 200 personnes, on rencontre en moyenne 18 fraudeurs.
   $\dfrac{765}{18} = 42,5$.
   Pour ne pas perdre d'argent, le montant de l'amende doit être de 42,5 euros.

Exercice 4 (4 points)
Dans une loterie, à chaque jeu, on a 5% de chance de gagner. On décide de jouer n fois (n entier, $n \geqslant 1$). Chaque jeu est indépendant des autres.
Soit X la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où l'on-gagne à cette loterie lors des n jeux.

1. Quelle est la loi que suit X ? Préciser ses paramètres.
   On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = 0,05$ (le "succès" est que le joueur gagne sa partie).
   La variable X qui compte le nombre de jeux gagnés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0,05)$.

2. Montrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,95^n$.
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0,95^n$.

3. En déduire le nombre de parties qu'il faut jouer au minimum pour avoir plus de 50% de chance de gagner au moins une fois.
   On cherhce le plus petitt entier n tel que $P(X \geqslant 1) > \dfrac{1}{2}$.
   Donc $1 - 0,95^n > \dfrac{1}{2}$, soit $0,95^n < 0,5$.
   La suite géométrique $(0,95^n)$ est décroissante et tend vers 0.
   En tatonnant avec la calculatrice (ou via un algorithme de seuil), on a :
   $0,95^{13} \approx 0,51$, et $0,95^{14} \approx 0,49$.
   Le plus petit entier n tel que $P(X \geqslant 1) > \dfrac{1}{2}$ est $n = 14$.
   Il faut jouer au moins 14 parties pour avoir plus d'une chance sur deux de gagner au moins une fois.

Interrogation de mathématiques n° 7
Sujet 2

Exercice 5 (5 points)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 90$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 900$
   (a) Calculer V_0 et V_1.
   (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.
5. Soit $n \geqslant 0$.
   Déteminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 6 (5 points)
Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros.
Le 1er janvier 2015 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le mois précédent. On note $u_1 = 30$, et pour tout $n \geqslant 1$, u_n le montant déposé le n^{e} mois à partir de décembre 2014.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
3. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^{e} mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2015.
   (a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
   (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.

Exercice 7 (6 points)
Dans le métro, il y a 9 % des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station Alesia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes qui fraudent sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale. On arrondira les probabilités à 10^{-4}

1. Sans justifier, donner les paramètres de cette loi.
2. Exprimer et puis calculer $P(X = 21)$.
3. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
4. Quelle est la probabilité de signaler au moins 15 fraudeurs ?
5. En moyenne, combien de personnes seront signalées en fraude ?
6. Si le prix du ticket est de 1,70 euros, quel doit être le montant de l'amende pour que l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent à cause de la fraude, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station.

Exercice 8 (4 points)
Dans une loterie, à chaque jeu, on a 5% de chance de gagner. On décide de jouer n fois (n entier, $n \geqslant 1$). Chaque jeu est indépendant des autres.
Soit X la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où l'on-gagne à cette loterie lors des n jeux.

1. Quelle est la loi que suit X ? Préciser ses paramètres.
2. Montrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,95^n$.
3. En déduire le nombre de parties qu'il faut jouer au minimum pour avoir plus de 50% de chance de gagner au moins une fois.