Contrôle de mathématiques n° 4

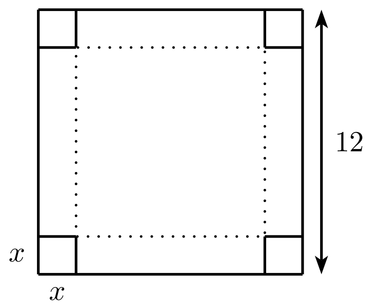
Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.
2. Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
3. (a) Calculer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$.
4. Donner deux nombres m et M tels que pour tout réel x de $[-4;4]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 (3.5 points)

Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de x cm de côté.
En relevant les bords, on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.



1. Expliquer pourquoi les valeurs possibles de x appartiennent à l'intervalle $[0;6]$.
2. Exprimer le volume de la boîte $V(x)$ en fonction de x.
3. Déterminer le volume maximal de la boîte. Justifier.

Exercice 3 (6,5 points)

Dans le métro, il y a 9 % des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station Alesia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes qui fraudent sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale. On arrondira les probabilités à 10^{-4}.

1. Sans justifier, donner les paramètres de cette loi.
2. Exprimer et puis calculer $P(X = 21)$.
3. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
4. Quelle est la probabilité de signaler au moins 15 fraudeurs ?
5. En moyenne, combien de personnes seront signalées en fraude ?
6. Si le prix du ticket est de 1,70 euros, quel doit être le montant de l'amende pour que l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent à cause de la fraude, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station.

Exercice 4 (3 points)

1. Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Résoudre dans $[-\pi;2\pi]$ l'équation $2\sin^2 x - \sin x = 0$.

Exercice 5 (bonus, 2 points)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On lance une pièce équilibrée n fois de suite. On note p_n la probabilité d'obtenir au moins deux foix pile sur les n lancers.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $p_n = 1 - (n+1) \times 0,5^n$.
2. Déterminer le nombre minimum de lancers à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins deux fois pile soit supérieure ou égale à 0,999. Justifier.